

Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO
SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATIO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. I — 1946. — No. 4

Z a g r e b 1 9 4 6

Isdaju: Matematičko-fizička sekcija i Astronomsko-geofizička sekcija

SADRŽAJ - СОДЕРЖАНИЕ - TABLE DES MATIÈRES - CONTENTS

V. Lopašić — Zl. Janković:

Strana

Jedan pokus s fizikalnim njihalom	
Опыт с физическим маятником	
Une expérience concernant le pendule physique	
An Experiment with the Physical Pendulum	145—167

Др. Митринович — Dr. Mitrinović:

О једној линеарној парцијалној једначини	
О линейном уравнении с частными производными	
Sur une équation linéaire aux dérivées partielles	
A differential partial equation	168—181

Ugao za svakoga - Разное - Mélanges - Miscellany	
Realnih brojeva ima zbilja više nego racionalnih brojeva	182
L. R.: Šmitova teorija postanka Zemlje	182—184
Zadaci 33—45	
Rješenja zadataka 4, 5, 16, 19, 20, 21, 23, 24	

Clanci, dopisi, pretplate i dr. šalju se na redakciju Glasnika, Zagreb, Marulićev trg 19, Tel. 40-44, 40-45 ili na Upravu Društva, Ilica 16 III, Tel. 65-85 i naznačiti »Za Glasnik mat.-fizički i astronomski«. — Ček Prirodoslovnog društva: 40-704214.

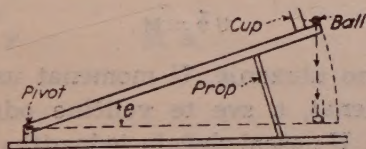
Vlasništvo i naklada Društva.

Godišnja pretplata iznosi Din. 120.—, a može se slati na pošt. čekovni račun broj 40-704214. — Redakcioni odbor: Dr. D. Blanuša, D. M. Katalinić, Dr. Đ. Kurepa, Dr. L. Randić, Dr. I. Supek. — Glavni i odgovorni urednik: Dr. Đuro Kurepa. — Stamparija »Rožankovski«, Zagreb, Savska c. 31.

JEDAN POKUS S FIZIKALNIM NJIHALOM

Pod naslovom »Dimnjak koji pada — paradoks prostog pada«, opisao je R. M. Sutton¹⁾ pokus, koji bi trebao objasniti zapaženo otkidanje gornjeg dijela tvorničkih dimnjaka za vrijeme rušenja. Navodimo gotovo doslovno to mjesto:

»Pustimo li padati iz vertikalnog položaja štap, kojemu jedan kraj miruje na stolu, tada svaki djelić štapa opisuje luk kružnice. Središte oscilacije je ona njegova točka, koja ima isto ubrzanje kao i djelić, koji bi slobodno padao po istom luku: sve točke, koje leže iznad toga središta, padaju s većim ubrzanjima nego što su ona, koja bi postigle, da slobodno padaju po kružnim lukovima, koji njima pripadaju. Zbog toga dolazi konačno štap do položaja, ispod kojega vertikalna komponenta ubrzanja kraja štapa premašuje ubrzanje prostog pada. Za jednoliki štap bit će to za one kutove, za koje je $\cos^2 \Theta$ veći od $\frac{2}{3}$, odnosno Θ manji od 35° (sl. 1).²⁾



Da se navedene činjenice bolje predoče i samo prelamanje dimnjaka koji pada, objasni, možemo načiniti mehaničku spravu i to ovako: »Načinimo, da se štap dug jedan metar može okretati oko horizontalne osi, koja prolazi njegovim krajem tako, da se može slobodno vrtiti u vertikalnoj ravnini. U točki, otprilike 85 cm udaljenoj od osovine, smjestimo laku 8 cm visoku čašicu od papira. Na kraju štapa urežimo malenu udubinu, da u nju možemo smjestiti čeličnu kuglicu, kad štap podupremo kod 35° . Izbijemo li naglo uporanj i štap padne, kuglica će pasti u čašicu, premda je rub čašice započeo svoje gibanje iz točke, koja je bila viša od kuglice.«

¹⁾ R. M. Sutton: *Demonstration Experiments in Physics*, p. 89, Mc Graw-Hill Book Company, 1938.

²⁾ Sl. 1. je uzeta iz knjige navedene pod 1), str. 89.

Poteškoće pri izvođenju ovog pokusa, nazovimo ga Suttonovim, potakle su nas, da ga posebno obradimo, teoretski i eksperimentalno.

I. Maksimalna visina čašice

Za daljnje razmatranje pretpostavljamo, da imademo jednoliki i tanki štap, koji se može okretati oko horizontalne osovine, koja je okomita na štap i prolazi jednim njegovim krajem. Na drugom kraju, koji je uzdignut nad horizontalnu ravninu, neka se nalazi materijalna točka. Iz ovog početnog položaja oba se tijela počnu gibati istodobno uslijed vlastitih težina. Gibanja neka se zbivaju međusobno neovisno. Štap pritom izvodi gibanje njihala, a materijalna točka slobodno pada.

Nastaje pitanje, u kojoj se visini h nad horizontalnom ravninom nalazi mat. točka, kad štap stigne u tu ravninu. Ta će visina biti neka funkcija početnog priklona Θ štapa prema horizontalnoj ravnini, t. j.

$$h = h(\Theta). \quad (1)$$

Za vrtnju krutog tijela oko čvrste osovine vrijedi

$$U \ddot{\vartheta} = M, \quad (2)$$

gdje $\ddot{\vartheta}$ znači kutno ubrzanje, U momenat ustrajnosti tijela, a M zakretni momenat, a sve te veličine određene s obzirom na osovinu vrtnje. U našem slučaju jednačba (2) poprima oblik

$$r \ddot{\vartheta} = -\frac{3}{2} g \cos \vartheta, \quad (3)$$

gdje r znači dužinu štapa, a ϑ ma kakav priklon. Integriranjem izraza (3) dobivamo

$$r \dot{\vartheta}^2 = -3 g \sin \vartheta + C. \quad (4)$$

Konstantu C odredit ćemo iz početnih uvjeta, a ti glase

$$\text{za } t=0, \quad \vartheta = \Theta, \quad \dot{\vartheta} = 0. \quad (5)$$

Jednačba (4) tada prelazi u

$$r \dot{\vartheta}^2 = 3 g (\sin \Theta - \sin \vartheta), \quad (6)$$

ili

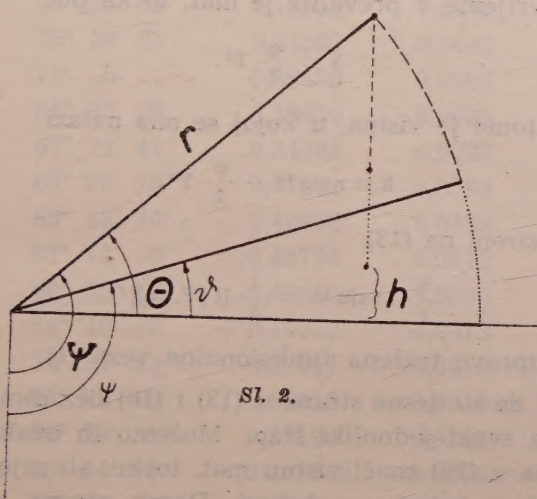
$$dt = -\sqrt{\frac{r}{3g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin \Theta - \sin \vartheta}} \quad (7)$$

Negativni predznak dolazi zbog toga, što se kut ϑ umanjuje s vremenom. Stavimo li (sl. 2)

$$\vartheta = \psi - \frac{\pi}{2}, \quad \Theta = \Psi - \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

prelazi (7) u

$$dt = - \sqrt{\frac{r}{6g}} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Psi}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}}. \quad (9)$$



Supstitucijom

$$\sin \frac{\psi}{2} = \sin \frac{\Psi}{2} \sin \varphi \quad (10)$$

prelazi (9) u

$$\sqrt{\frac{g}{2r}} dt = - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Psi}{2} \sin^2 \varphi}}. \quad (11)$$

Ovu jednadžbu trebamo integrirati u granicama od $\vartheta = \Theta$ do $\vartheta = 0$. Zbog (8) i (10) imamo kao granice integrala

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \arcsin \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\Psi}{2}}. \quad (12)$$

Prema tome je vrijeme, potrebno da štap padne u horizontalnu ravninu, dano izrazom

$$\sqrt{\frac{g}{2r}} T = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Psi}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{3}} I(\Psi, \varphi_2). \quad (13)$$

Integral u (13) je normalni oblik eliptičkog integrala i iznos mu možemo odrediti iz tablica.

U isto vrijeme T prevalila je mat. točka put

$$s = \frac{g}{2} T^2. \quad (14)$$

Prema tome je visina, u kojoj se ona nalazi

$$h = r \sin \Theta - \frac{g}{2} T^2, \quad (15)$$

ili s obzirom na (13)

$$\frac{h}{r} = \sin \Theta - \frac{1}{3} [I(\Psi, \varphi_2)]^2. \quad (16)$$

To je upravo tražena funkcionalna veza (1).

Budući da su desne strane u (13) i (16) bez dimenzija, vrijede one za svaki jednoliki štap. Možemo ih ovako tumačiti: desna strana u (16) znači visinu mat. točke, ali mjerenu duljinom štapa kao jedinicom dužine. Desna strana u (13) jest vrijeme padanja štapa izraženo novom vremenskom jedinicom. Ta nova vremenska jedinica je vrijeme potrebno da tijelo prosto padajući prevali put jednak dužini štapa.

Vrijeme potrebno da mat. točka stigne do horizontalne ravnine, dano je jednadžbom

$$r \sin \Theta = \frac{g}{2} \tau^2 \quad (17)$$

ili

$$\sqrt{\frac{g}{2r}} \tau = \sqrt{\sin \Theta}. \quad (18)$$

Iz (13) i (18) slijedi, da mat. točka zakasni za štapom ovoliko:

$$\sqrt{\frac{g}{2r}} (\tau - T) = \sqrt{\sin \Theta} - \frac{1}{\sqrt{3}} I(\Psi, \varphi_2). \quad (19)$$

Budući da smo u (16) našli funkcionalnu vezu (1), naša je slijedeća zadaća odrediti maksimum te funkcije. Traženu vrijednost daje tablica I. Prvi stupac znači početni priklon štapa Θ , drugi pripadne vrijednosti φ_2 prema (12) treći vrijednosti

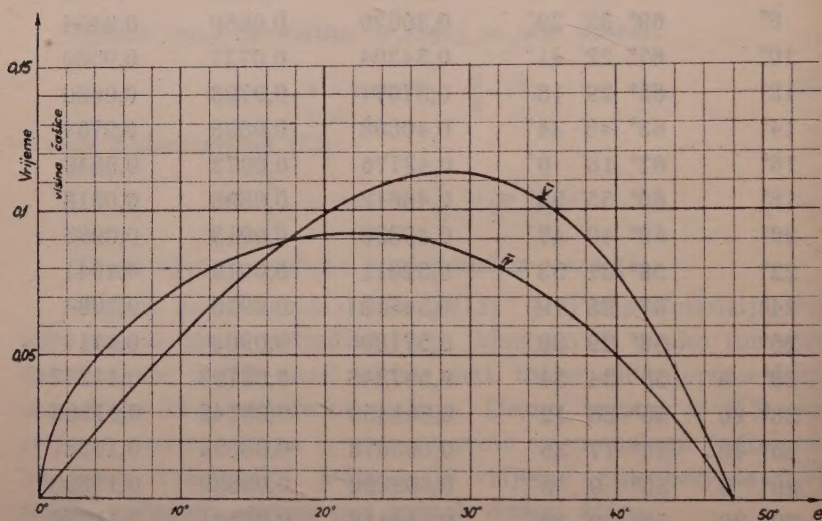
Tablica I.

Θ	φ_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ I	IV	V
0°	90° 0' 0"	0,00000	0,0000	0,0000
2°	79° 25' 5"	0,15259	0,0342	0,0116
4°	75° 12' 23"	0,21592	0,0482	0,0231
6°	72° 5' 1"	0,26476	0,0586	0,0344
8°	69° 32' 29"	0,30620	0,0669	0,0454
10°	67° 22' 41"	0,34304	0,0737	0,0560
12°	65° 29' 18"	0,37671	0,0793	0,0660
14°	63° 48' 34"	0,40808	0,0838	0,0754
16°	62° 18' 0"	0,43776	0,0872	0,0840
18°	60° 55' 50"	0,46612	0,0898	0,0918
20°	59° 40' 47"	0,49350	0,0913	0,0985
22°	58° 31' 53"	0,52011	0,0919	0,1041
24°	57° 28' 19"	0,54618	0,0916	0,1084
26°	56° 29' 30"	0,57180	0,0903	0,1114
28° 0'	55° 34' 54"	0,597248	0,08793	0,11277
28° 20'	55° 26' 12"	0,601459	0,08745	0,11285
28° 40'	55° 17' 35"	0,605678	0,08694	0,11287
29° 0'	55° 9' 5"	0,609890	0,08639	0,11285
29° 20'	55° 0' 39"	0,614110	0,08581	0,11276
29° 40'	54° 52' 21"	0,618321	0,08521	0,11263
30°	54° 44' 8"	0,62254	0,0846	0,1124
32°	53° 56' 50"	0,64782	0,0801	0,1103
34°	53° 12' 40"	0,67321	0,0746	0,1060
36°	52° 31' 25"	0,69883	0,0678	0,0994
38°	51° 52' 51"	0,72470	0,0599	0,0904
40°	51° 16' 46"	0,75102	0,0507	0,0788
42°	50° 43' 0"	0,77793	0,0401	0,0639
44°	50° 11' 24"	0,80538	0,0281	0,0460
46°	49° 41' 50"	0,83369	+0,0145	+0,0243
48°	49° 14' 12"	0,86282	-0,0008	-0,0013

integrala $I(\Psi, \varphi_2)^{3)}$ podijeljene sa $\sqrt{3}$, a to su prema (13) vremena pada štapa. U četvrtom stupcu su numeričke vrijednosti desne strane (19), t. j. zakašnjenje mat. točke za štapom. Peti stupac sadrži iznose visina izračunane po (16). Sl. 3 grafički prikazuje posljednja dva stupca, pritom krivulja IV predočuje stupac IV, a krivulja V stupac V. Iz V. stupca vidimo da traženu maksimalnu visinu h dobivamo za početni priklon

$$\Theta_m = 28^\circ 40' \pm 5'. \quad (20)$$

Također i četvrti stupac pokazuje maksimum, ali kod manjeg početnog priklona (22°). Dakle najveće vremensko zakašnjenje ne podudara se s najvećim prostornim.



Sl. 3.

Odatle je očigledno, da priklon $\Theta = 35^\circ$, kojeg R. M. Sutton preporučuje, nije najpovoljniji za opisani pokus; jer za $\Theta = 35^\circ$ daje tablica I vrijednost $\frac{h}{r} = 0,1027$ kao najveću visinu čašice, dok je naprotiv za $\Theta = \Theta_m$, $\frac{h}{r} = 0,1129$ dakle otprilike za 10% veće.

³⁾ Izračunavanje provedeno pomoću A. M. Legendre: *Tafeln der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung*, F. Emde (Herausg.) 1931.

II. Relativna staza kuglice

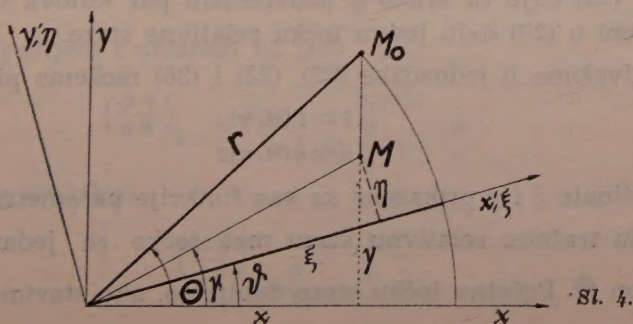
Hoćemo li ovaj »Paradoks prostog pada« eksperimentalno pokazati, tada će jedna kuglica prikazivati materijalnu točku, a sama čašica morat će imati stanovitu širinu, da u nju može pasti kuglica. Najveća visina, koju može tada imati čašica, ovisi o njenoj širini, jer čašica ne smije smetati gibanju kuglice. Da tu visinu odredimo, moramo poznavati put mat. točke u koordinatnom sistemu, koji je čvrsto povezan sa štapom. Tada možemo također odrediti i kut, pod kojim se kuglica približava rubu čašice. Pomoću toga kuta i širine čašice odredit ćemo korekturu njezine visine. S druge strane važno je za oblik udubine na kraju štapa, pod kojim kutom napušta kuglica štap, jer udubina ne smije smetati slobodan polazak kuglice. Nadalje, ako poznajemo relativnu stazu kuglice, možemo odgovoriti na pitanje, da li štap i kuglica pri gibanju smetaju jedno drugoga.

Odredit ćemo relativnu stazu mat. točke. Koordinatna ravnina mirnog sustava (XY) podudara se s vertikalnom ravninom, u kojoj se gibanja zbivaju. Ishodište neka mu je u osi, oko koje se vrti štap, a os X je horizontalna. Koordinatna ravnina relativnog sustava (X', Y') neka se također podudara sa vertikalnom ravninom, u kojoj se gibanja zbivaju. Ishodište neka mu je u osi, oko koje se štap vrti a os X' neka leži u štapu.

Na početku gibanja nalazi se mat. točka na slobodnom kraju štapa. U sistemu (X, Y) mat. točka opisuje pravac paralelan sa osi Y , budući da slobodno pada. Zbog toga je njezin položaj M u izvjesno vrijeme određen kutom γ , što ga njezin radius vektor zatvara sa osi X (sl. 4). Prema tome jednadžbe

$$\begin{aligned} x &= r \cos \Theta \\ y &= r \cos \Theta \operatorname{tg} \gamma \end{aligned} \quad (21)$$

prikazuju put mat. točke u sistemu (X, Y); r znači dužinu štapa.



Iz sl. 4 neposredno izvodimo koordinate x' y' točke M

$$\begin{aligned} x' &= \frac{r \cos \Theta}{\cos \gamma} \cos (\gamma - \vartheta) = r \xi \\ y' &= \frac{r \cos \Theta}{\cos \gamma} \sin (\gamma - \vartheta) = r \eta, \end{aligned} \quad (22)$$

gdje je ϑ kut, što ga štap u izvjesno vrijeme zatvara sa osi X . Sa ξ i η označit ćemo relativne koordinate točke M mjerene dužinom štapa kao jedinicom i njih ćemo dalje upotrebljavati. Jednadžbe (22) već predočuju traženu relativnu stazu, samo treba za γ i ϑ uvrštavati istovremene vrijednosti: mogli bi dakle uzeti vrijeme kao parametar. Jednostavnije je međutim uzeti kut φ kao parametar. Prema (8) i (10) pripada odabranom φ neko ϑ , koje izlazi iz

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2} \right) \sin \varphi. \quad (23)$$

Vrijeme, koje je potrebno, da štap stigne u taj ϑ položaj, dano je jednadžbom

$$\sqrt{\frac{g}{2r}} t = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Psi}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{3}} I(\Psi, \varphi), \quad (24)$$

dakle kao funkcija φ . U taj čas nalazi se kuglica u visini

$$y = r \sin \Theta - \frac{g}{2} t^2 = r \sin \Theta - \frac{r}{3} [I(\Psi, \varphi)]^2. \quad (25)$$

Ispoređenjem (25) sa (21) dobivamo

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \Theta - \frac{1}{3 \cos \Theta} [I(\Psi, \varphi)]^2. \quad (26)$$

Tako smo i kut γ prikazali kao funkciju kuta φ . Jednadžbe (23) i (25) daju za svako φ istovremeni par kutova ϑ i γ , koji uvršteni u (22) daju jednu točku relativne staze.

Uvažimo li jednadžbe (22), (23) i (26) možemo pisati

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(\Theta, \varphi) \\ \eta &= \eta(\Theta, \varphi). \end{aligned} \quad (27)$$

Koordinate ξ i η prikazane su kao funkcije parametra φ i predočuju traženu relativnu stazu mat. točke za jedan početni priklon Θ . Početnu točku staze dobijemo, ako stavimo $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Da nađemo početni uspon mat. točke, odnosno kut, pod kojim se ona približuje rubu čašice, potražimo strminu staze (22). Slijedi

$$\frac{d\eta}{d\vartheta} = \frac{\frac{d\gamma}{d\vartheta} \cos \vartheta - \cos \gamma \cos (\gamma - \vartheta)}{\frac{d\gamma}{d\vartheta} \sin \vartheta + \cos \gamma \sin (\gamma - \vartheta)} \quad (28)$$

a iz (26) izlazi

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \gamma}{\cos \Theta} \frac{I(\Psi, \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Psi}{2} \sin^2 \varphi}} \quad (29)$$

Ali dok nam (23) daje

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{2 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \varphi}{\cos \frac{\Psi}{2}} \quad (30)$$

Jednadžbe (29) i (30) daju s obzirom na (10)

$$\frac{d\gamma}{d\vartheta} = \frac{\cos^2 \gamma}{3 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \Theta \cos \varphi} I(\Psi, \varphi) \quad (31)$$

Izrazi (28) i (31) određuju strminu staze u svakoj njenoj točki.

Uzmimo napose $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tada će zbog (28) biti $\vartheta = \Theta$, a zbog (26) $\gamma = \Theta$, a to odgovara početnom položaju. Ako te vrijednosti uvrstimo u (31), dobivamo neodređeni izraz oblika $\frac{0}{0}$.

Pravu vrijednost odredit ćemo graničnim prelazom

$$\left(\frac{d\gamma}{d\vartheta} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{d\vartheta} = \frac{\cos \Theta}{3 \sin \frac{\Psi}{2}} \left[\frac{\partial I(\Psi, \varphi)}{\partial \varphi} ; \frac{d(\cos \varphi)}{d\varphi} \right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \quad (32)$$

Iz (32) slijedi s obzirom na (10)

$$\left(\frac{d\gamma}{d\vartheta} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos \Theta}{3 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Psi}{2}} \quad (33)$$

a zbog (8) izlazi

$$\left(\frac{d\gamma}{d\vartheta} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \quad (34)$$

To je značajni rezultat. On izriče, da je prirast kuta γ , podijeljen prirastom kuta ϑ , na početku gibanja veličina nezavisna o početnom priklonu Θ . Stavimo li (34) u (28) i obazremo li se na početne uvjete, dobivamo

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \cotg \Theta. \quad (35)$$

Tako smo našli početni uspon relativne staze.

Odnos (35) možemo također i elementarno izvesti. U času $t=0$, t. j. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, još ni mat. točka ni štap nemaju brzine. Zbog toga je omjer početnih pomaka jednak omjeru početnih ubrzanja. Početno ubrzanje kraja štapa iz (3) jednako je

$$r\ddot{\vartheta} = -\frac{3}{2} g \cos \Theta \quad (36)$$

i ima smjer okomit na štap. Ubrzanje mat. točke g je u smjeru vertikale. U relativnom koordinatnom sustavu ima prema tome mat. točka ove komponente ubrzanja na početku gibanja

$$\begin{aligned} \alpha_{\xi} &= -g \sin \Theta \\ \alpha_{\eta} &= \frac{3}{2} g \cos \Theta - g \cos \Theta = \frac{1}{2} g \cos \Theta. \end{aligned} \quad (37)$$

Za početni uspon slijedi

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\alpha_{\eta}}{\alpha_{\xi}}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \cotg \Theta. \quad (38)$$

Iz posljednjeg izraza (38), koji je sa (35) identičan, očito je, da će se mat. točka odvojiti od štapa za svaki početni priklon Θ . To se zbiva pod kutom $(\pi-\alpha)$ prema štapu. Uvedemo li dakle suplementni kut α (sl. 5), (35) će glasiti

$$\tg \alpha = \frac{1}{2} \cotg \Theta. \quad (39)$$

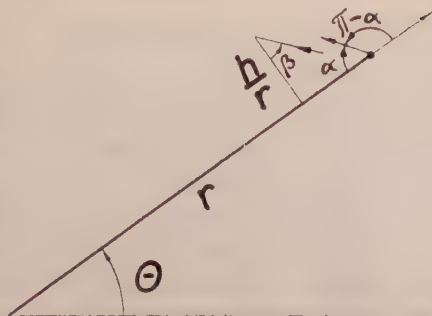
Kod Suttonovog pokusa smije biti udubina na kraju štapa samo jedan dio polukugle, koja imade smjer (39) kao os. Samo u tom slučaju ne smeta štap polasku kuglice, koja predstavlja mat. točku. Ako pak hoćemo, da kuglica na početku pokusa (štap je dignut do priklona Θ) stabilno sjedi u toj udubini, mora biti

$$\alpha > \Theta. \quad (40)$$

Taj uvjet s obzirom na (39) daje

$$\cos^2 \Theta > \frac{2}{3}, \quad \text{ili} \quad \Theta < 35^{\circ} 16'. \quad (41)$$

Kad bi htjeli izvesti pokus s većim početnim prikonom nego što je taj granični kut u (41), morali bismo upotrijebiti tijelo, koje bi se držalo na kraju štapa pomoću trenja.



Sl. 5.

Da odredimo strminu relativne staze mat. točke u času, kad štap stigne u horizontalni položaj moramo u (28) i (31) staviti $\vartheta = 0$. Iz (28) slijedi

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\vartheta=0} = \frac{\left(\frac{d\gamma}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=0} - \cos^2 \gamma_0}{\sin \gamma_0 \cos \gamma_0}, \quad (42)$$

a (31) daje

$$\left(\frac{d\gamma}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = \frac{\cos^2 \gamma_0}{3 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \Theta \cos \varphi_2} I(\Psi, \varphi_2). \quad (43)$$

Sa γ_0 označili smo kut, koji odgovara vrijednosti $\vartheta = 0$. Iz jednadžbe (42) i (43) dobivamo

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\vartheta=0} = \cotg \gamma_0 \left[\frac{I(\Psi, \varphi_2)}{3 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \Theta \cos \varphi_2} - 1 \right]. \quad (44)$$

Pritom treba uvažiti, da je

$$\cotg \gamma_0 = \frac{r}{h} \cos \Theta. \quad (45)$$

Kut β , što ga relativna staza zatvara sa čašicom, dobivamo iz relacije

$$\cotg \beta = - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\vartheta=0}. \quad (46)$$

Ako je b promjer cilindričke čašice, kojoj je h os, tada izlazi kao prva približnost njezine reducirane visine

$$H = h - \frac{b}{2} \cotg \beta. \quad (47)$$

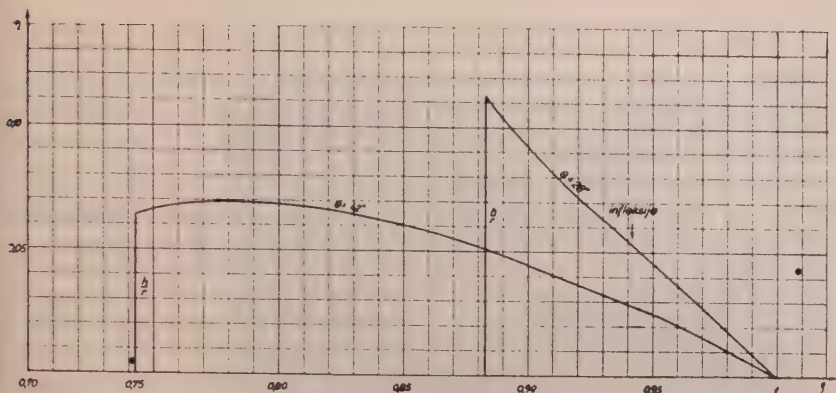
Tablica II.

Θ	α	β
0°	90° 0' 0"	0° 0' 0"
4°	82° 2' 19"	4° 0' 37"
8°	74° 18' 1"	8° 3' 29"
12°	66° 58' 8"	12° 15' 55"
16°	60° 10' 58"	16° 39' 31"
20°	53° 57' 52"	21° 26' 44"
24°	48° 19' 59"	26° 50' 15"
28°	43° 14' 23"	33° 21' 59"
32°	38° 39' 56"	42° 13' 10"
36°	34° 32' 7"	56° 54' 59"
40°	30° 47' 23"	90° 52' 32"
44°	27° 22' 25"	146° 31' 19"
46°	25° 49' 30"	167° 18' 39"
48°	24° 14' 15"	180° 30' 11"

Tablica III.

$$\Theta = 28^\circ$$

φ	γ	δ	ξ	η	$-\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}$
90°	28° 0' 0,0"	28° 0' 0,0"	1,000 000	0,000 000	
89°	27° 58' 50,3"	27° 58' 15,5"	0,999 820	0,000 169	0,940
88°	27° 55' 21,3"	27° 53' 2,1"	0,999 283	0,000 674	0,939
87°	27° 49' 33,2"	27° 44' 20,9"	0,998 390	0,001 511	0,938
86°	27° 41' 26,4"	27° 32' 13,2"	0,997 148	0,002 674	0,936
85°	27° 31' 1,6"	27° 16' 41,0"	0,995 565	0,004 154	0,934
84°	27° 18' 19,4"	26° 57' 46,9"	0,993 650	0,005 937	0,931
82°	26° 46' 6,7"	26° 10' 5,8"	0,988 873	0,010 360	0,926
80°	26° 4' 57,1"	25° 9' 39,2"	0,982 934	0,015 812	0,918
78°	25° 15' 1,3"	23° 57' 3,9"	0,975 972	0,022 135	0,908
76°	24° 16' 31,6"	22° 32' 55,4"	0,968 151	0,029 186	0,901
74°	23° 9' 42,2"	20° 58' 0,5"	0,959 649	0,036 780	0,893
72°	21° 54' 48,2"	19° 13' 1,8"	0,950 656	0,044 769	0,888
70°	20° 32' 6,4"	17° 18' 43,5"	0,941 368	0,053 010	0,887
68°	19° 1' 54,9"	15° 15' 48,9"	0,931 984	0,061 384	0,892
66°	17° 24' 33,2"	13° 5' 0,4"	0,922 699	0,069 795	0,906
64°	15° 40' 23,0"	10° 46' 57,6"	0,913 706	0,078 178	0,932
62°	13° 49' 47,1"	8° 22' 18,2"	0,905 186	0,086 490	0,976
60°	11° 53' 11,4"	5° 51' 36,2"	0,897 309	0,094 726	1,048
58°	9° 51' 3,7"	3° 15' 26,8"	0,890 233	0,102 902	1,155
56°	7° 43' 54,1"	+0° 34' 17,0"	0,884 099	0,111 065	1,331
55°	6° 38' 36,3"	—0° 48' 1,6"	0,881 425	0,115 103	1,510
54°	5° 32' 15,4"	—2° 11' 25,0"	0,879 031	0,119 286	1,747



Sl. 6.

Tablica II sadrži kutove α i β za različite početne priklone Θ . Tablica III prikazuje relativnu stazu za $\Theta = 28^\circ$. Prvi stupac sadrži vrijednosti parametra φ , drugi γ izračunan pomoću (26), treći ϑ pomoću (23). Dva slijedeća stupca sadrže ξ i η izračunane pomoću (22), dok je u posljednjem srednja vrijednost strmine među susjednim točkama krivulje. Sl. 6 prikazuje samu krivulju. Ona ide gotovo pravocrtno. Značajna je točka infleksije kod $\varphi = 70^\circ$. U sl. 6 također je nacrtana krivulja za $\Theta = 42^\circ$ (tablica IV). Ta je krivulja konkavna prema dolje.

Tablica IV.

 $\Theta = 42^\circ$

φ	γ	ϑ	ξ	η	$-\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}$
90°	$42^\circ 0' 0,0''$	$42^\circ 0' 0,0''$	1,000 000	0,000 000	
89°	$41^\circ 58' 25,9''$	$41^\circ 57' 37,9''$	0,999 589	0,000 228	0,555
88°	$41^\circ 53' 43,8''$	$41^\circ 50' 36,4''$	0,998 362	0,000 907	0,553
87°	$41^\circ 45' 54,0''$	$41^\circ 38' 54,6''$	0,996 327	0,002 026	0,550
83°	$40^\circ 43' 33,2''$	$40^\circ 6' 58,5''$	0,980 554	0,010 434	0,533
79°	$38^\circ 53' 8,7''$	$37^\circ 28' 15,9''$	0,954 418	0,023 570	0,503
75°	$36^\circ 13' 28,4''$	$33^\circ 52' 14,4''$	0,920 430	0,037 835	0,420
71°	$32^\circ 48' 17,9''$	$29^\circ 29' 9,8''$	0,882 666	0,051 187	0,353
67°	$28^\circ 37' 57,0''$	$24^\circ 28' 31,6''$	0,844 457	0,061 377	0,241
63°	$23^\circ 44' 5,5''$	$18^\circ 58' 20,2''$	0,809 006	0,067 402	0,170
61°	$21^\circ 1' 42,6''$	$16^\circ 4' 13,3''$	0,793 189	0,068 811	0,089
59°	$18^\circ 9' 44,6''$	$13^\circ 5' 0,4''$	0,779 041	0,069 239	+0,030
57°	$15^\circ 8' 56,7''$	$10^\circ 1' 16,5''$	0,766 838	0,068 589	-0,053
55°	$12^\circ 0' 15,3''$	$6^\circ 53' 32,3''$	0,756 737	0,067 697	-0,088
53°	$8^\circ 44' 49,5''$	$3^\circ 42' 14,5''$	0,748 979	0,066 094	-0,206
52°	$7^\circ 4' 59,1''$	$2^\circ 5' 23,1''$	0,746 018	0,065 181	-0,308
51°	$5^\circ 23' 58,3''$	$0^\circ 27' 46,9''$	0,743 688	0,064 234	-0,406

Staza za $\Theta = 28^\circ$ (tablica III) proračunana je, jer leži blizu staze za $\Theta = \Theta_m$. Da možemo zaključivati na tendenciju promjene ove staze s Θ , proračunana je još staza za $\Theta = 42^\circ$ (tablica IV) i također α i β za različite Θ (tablica II). Na osnovu ovih numeričkih podataka možemo odgovoriti na pitanje, pod kojim se uvjetima zbivaju gibanja kuglice i štapa međusobno neovisno u području $\Theta \geq \vartheta \geq 0$. Očigledno taj uvjet glasi

$$\frac{h}{r} > 0 \quad (48)$$

ili prema tablici I

$$\Theta < 48^\circ. \quad (49)$$

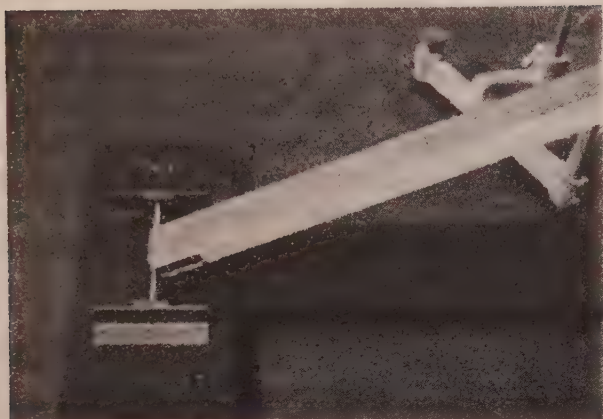
Kut $\Theta_g = 48^\circ$ jest granični kut za izvedivost Suttonovog pokusa.

III. Eksperimentalni uređaj

Na osnovi prethodnih razmatranja izgradili smo konačni uređaj za izvođenje Suttonovog pokusa i pritom smo nastojali ostvariti teoretski nađene najpovoljnije uvjete. Nazvali smo taj uređaj konačnim, jer smo već prije njega načinili dva druga. Međutim nastojeći ukloniti smetnje pri izvođenju pokusa s tim uređajima, proširivali smo teoriju pokusa, dok nije poprimila oblik, koji smo iznijeli u otsjecima I i II. Tako smo postepeno spoznavali uzroke smetnja, a zatim i način, kako ih se može ukloniti. Sada ćemo opisati tu konačnu aparaturu.

Štap je načinjen iz bukovine u obliku pravokutnog paralelepipeda dužine 100,0 cm, širine 4,0 cm i debljine 2,90 cm. Izabran je dobar komad drveta, za koji se je po izgledu moglo pretpostaviti, da ima jednoličnu gustoću. Naročita je pažnja posvećena osovini (sl. 7), oko koje se štap pri pokusu vrti. Ona je čelična i ima promjer 0,60 cm, a dužinu 14 cm. Osovina je zato uzeta tako duga, da se vrtnja štapa zbiva sa što većom točnošću u jednoj ravnini. Osovina je učvršćena na štap tako, da njezina centralna linija prolazi krajem štapa okomito na njegovu dužinsku os, a paralelno s bridom 4,0 cm. Učvršćenje je izvedeno pomoću dvije pruge od mjedi, koje su vijcima pritegnute pri kraju štapa, a osovina je provučena kroz rupe u prugama i s njima spojena kositrom. Krajevi osovine ulaze u ležaje od žute mjedi, koji su učvršćeni na komadima kutnog željeza, pritegnutim vijcima na podlogu iz tvrdog drveta. Podloga ima oblik slova I, da se može dobro pričvrstiti na stol.

Sl. 7. Osovina i ležaji.



Štap je na slobodnom kraju koso podrezan i okovan pločicom od mjedi tako, da je ravnina te pločice horizontalna, kad je štap priklonjen do $\Theta = 28^\circ$. U pločici je udarcem načinjena sitna udubina, u kojoj stabilno sjedi čelična kuglica pri gornjem priklonu štapa (sl. 8). Promjer kuglice u našem slučaju iznosi $\frac{1}{2}$ inča. Štap smo podrezali tako, da središte kuglice stavljene u udubinu u pločici leži na centralnoj liniji štapa

Sl. 8. Kuglica na kraju štapa. Slika prikazuje čašicu i uređaj za ispuštanje štapa.



100,0 cm daleko od osi vrtnje. Time smo ispunili zahtjev, da daljina središta kuglice od osi u času $t=0$ bude jednaka dužini štapa.

Čašica, u koju će kuglica pasti, načinjena je od celuloida i ima promjer $b=1.3$ cm, visinu 8,20 cm. Ona je učvršćena na gornju površinu štapa tako, da je nataknuća na drveni čep, koji tijesno u nju pristaje i koji je vijkom pritegnut uz štap u daljini 88,30 cm ($= r \cos \Theta$) od osi. Stvarnu visinu čašice valja mjeriti od dužinske osi štapa. Budući da štap ima debljinu 2,90 cm, to je onda visina čašice $8,20 + \frac{1}{2} 2,90 = 9,65$ cm. Tu visinu zahtijeva međutim teorija za naš slučaj. Naime za $\Theta = 28^\circ$ daje tablica I vrijednost $\frac{h}{r} = 0.1128$. Budući da je $r=100,0$ cm, dobivamo $h = 11.28$ cm. Prema formuli (47) treba tu visinu sniziti za $\frac{1}{2} b \cotg \beta = 0,99$ cm (β je uzeto iz tablice II). Dobivamo dakle $H = 10,29$ cm. U kutiju ove visine i odabranog promjera nesmetano bi ušla sitna čestica, koja bi započela padati istovremeno sa štapom. U našem slučaju središte odabrane kuglice izvodi gibanje takove čestice. Prema tome valja dalje sniziti čašicu za polumjer odabrane kuglice, t. j. za 0,64 cm. Dakle treba uzeti za visinu čašice $10,29 - 0,64 = 9,65$ cm, a tu smo visinu mi i odabrali.

Budući da smo komadić štapa otsjekli, tamo učvrstili mjedenu pločicu, dodali čašicu sa čepom i vijkom za njezino učvršćenje, opravdano je pitati se, da li je ovako prerađen štap dinamički ekvivalentan s teoretski pretpostavljenim jednoličnim štapom dužine 100,0 cm. Da to ispitamo izvadili smo štap s osovinom iz ležaja i na krajeve osovine nataknući čahure, na kojima su bridovi, koji se podudaraju s centralnom linijom osovine. Tako smo mogli ispitati štap kao njihalo. Važno je ponajprije, da li težište štapa leži na dužinskoj osi štapa. To smo ispitali tako, da smo poduprli bridove horizontalnim podlogama i počekali, da se štap umiri, te ispoređivali jedan njegov dužinski brid s viskom. U našem slučaju su se ta dva smjera dobro slagala, pa nije trebalo ništa mijenjati. Očito su mjedena ploča na kosom kraju štapa i čašica kompenzirali odrezani komadić drveta. Zatim smo pustili da štap izvodi

malene njihaje i odredili reduciranu dužinu. Za nju je izašlo 66,60 cm, dakle neznatno manje nego što teorija traži za jednolični štap.

Najviše poteškoća smo imali pri ostvarivanju uređaja za ispuštanje štapa. Kako god stvar izgledala jednostavna, ipak je nemoguće na pr. štap ispustiti iz ruke tako, da bi pokus uspio, premda se osigurali nekom zaprekom, da je bio priklon točno $\theta = 28^\circ$ u času ispuštanja. Ne vodi do cilja ni rezanje ili paljenje konca, kojim bi štap bio privezan. Razlog je tomu taj, što ni u jednom od ovih slučajeva štap ne počinje padati u $t = 0$ doista slobodno. Ili drukčije rečeno, ni u jednom od ovih slučajeva ne isčezne dosta brzo ona sila, koja je držala štap priklonjenim, pa se početak gibanja štapa zbiva ne samo pod djelovanjem težine, nego i pod utjecajem ostatka sile, kojom smo prije štap podržavali. To ima za posljedicu, ne samo da je gibanje štapa u samom početku nešto sporije nego se ni kuglica poradi toga ne odijeli od štapa i zato dobije od njega impuls u smjeru, u kojem se giba njegov kraj. Gibanje kuglice u tom slučaju nije slobodan pad, nego kosi hitac. Mnogi neuspjesi, što smo ih u početku imali, ukazivali su na to, da je valjano puštanje štapa u gibanje središnji problem čitavog pokusa, dok su trenje u osovini i sa uzduhom takve smetnje, od kojih se prva dade svesti na beznačajnu mjeru, dok druga poradi malenih brzina ne dolazi u obzir. Isto je tako i sa kuglicom. Njezin pad je s velikom približnošću slobodan (za onu dubinu, koja kod ovog pokusa dolazi u obzir), ako nam uspije učiniti, da je početak njezinog gibanja slobodan. Taj je uvjet ispunjen automatski, ako je početak gibanja štapa slobodan.

Sad ćemo opisati, kako smo postigli brzo iščezavanje sile, koja štap drži priklonjenim. Čvrsta zapreka priječi štap, da ne poprimi priklon veći od 28° . Štap dira zapreku (sl. 8) u neposrednoj blizini svojeg središta oscilacije, koje je u našem slučaju na $\frac{2}{3}$ dužine štapa od osi. U samom središtu oscilacije je sitna kvačica, za koju se priveže konac, baš dovoljno čvrst, da vukući okomito na dužinu štapa može ovaj prisloniti uz zapreku. Konac se zatim napinje dalje, dok ne pukne. Oslobođanje štapa je sada trenutno, ako nije prekratak komad konca, koji se napinje. Kod naše je aparature ta dužina konca oko 17 cm.

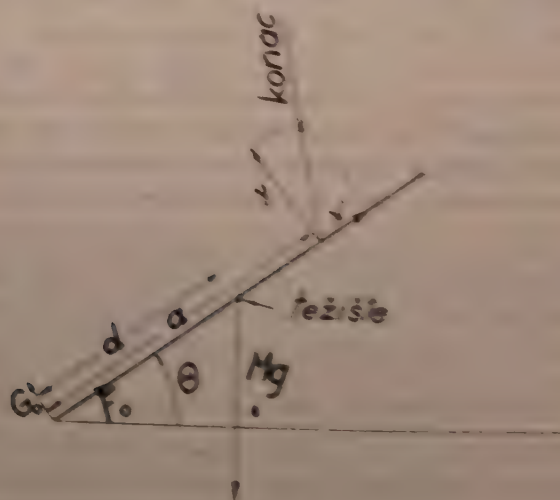
Mi ćemo sada motivirati netom opisanu uređaj za ispuštanje štapa. Ponajprije smo istaknuli, da konac hvata štap u središtu oscilacije i da vuče okomito na dužinu štapa, te da se zapreka, o koju se štap upire, nalazi tik uz mjesto, gdje vezemo konac. Ovo sve nije uzeto nasumice, nego jednodužno izlazi iz zahtjeva, da se pritisak letaja na osovinu štapa ne smije promijeniti u času, kad isčezne sila, koja štap podržava u početnom priklonu.

Označimo li sa F i G komponente pritiska letaja na osovinu u smjeru osi x odnosno y , to se lako nalazi na te komponente u času, kad je gibanje započelo¹⁾

$$F = Mg \sin \theta$$

$$G = Mg \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \cos \theta \quad (8)$$

gdje je d daljina težišta štapa od osi vrtnje, a l reducirana dužina promatranog njihala. U našem slučaju $d = \frac{l}{2}$, a $l = \frac{2}{3}$. Kad konac, privezan u daljini a od osi (sl. 9), podržava štap u mirovanju mora: 1) izbroj zakretnih momenata sila, koje dje-



Sl. 9.

¹⁾ Isporedi na pr. E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, I., str. 93, Leipzig 1898.

luju, biti nula i 2) zbroj komponenata sila, koje djeluju u smjeru osi x' odnosno y' , također nula. Dakle:

$$\begin{aligned} Y' - M g \sin \Theta &= 0 \\ F_0 + X' - M g \sin \Theta &= 0 \\ G_0 + Y' - M g \cos \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Ovoje smo s F_0 i G_0 označili pritisak ležaja na osovinu za vrijeme mirovanja štapa. Zahtijevamo li, da bude

$$\begin{aligned} F &= F_0 \\ G &= G_0, \end{aligned} \quad (52)$$

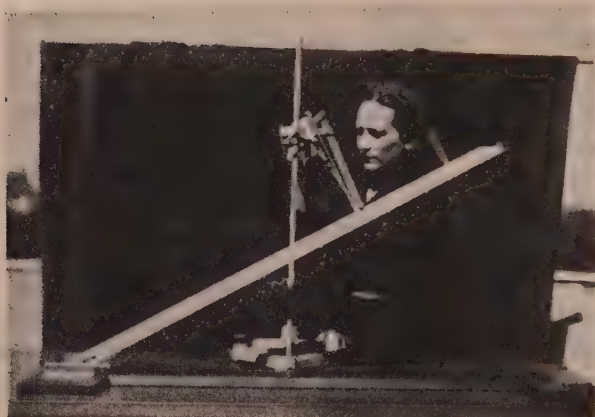
t. j. da se pritisak osovine ne promijeni u času, kad isčezne sila (X' , Y'), koja je do tada podržavala štap, to onda slijedi

$$\begin{aligned} X' &= 0 \\ \alpha &= l, \end{aligned} \quad (53)$$

a time je dokazana naša tvrdnja, da konac treba učvrstiti u središtu oscilacije i da treba vući okomito na dužinu štapa. Kad ne bi ovaj zahtjev bio ispunjen, dobio bi štap u početku gibanja udarac, jer se osovina, premda čvrsta, radi svoje dužine malo uvine djelovanjem sila.

Nadalje smo istakli, da ne smije biti prekratak komad konca, koji se nateže. Konac je elastičan i kad se napinje, on se protegne. To protegnuće je razmjerno dužini konca, dok veličina sile, kod koje konac puca, ne zavisi o dužini. Za vrijeme kidanja smanjuje se napetost u čitavom nategnutom dijelu konca, no to manje, što je konac duži, i uz primjerenu dužinu, vlakna se konca razidu, a da napetost konca praktički nije popustila. Zgodno je uzeti tako tanki konac, da je samom težinom štapa napet do blizu svoje granice čvrstoće, pa ga onda pri izvođenju pokusa treba još samo malo jače nategnuti, da pukne. Time se postizava vrlo miran polazak štapa, jer je njegov pritisak na zapreku bio malen.

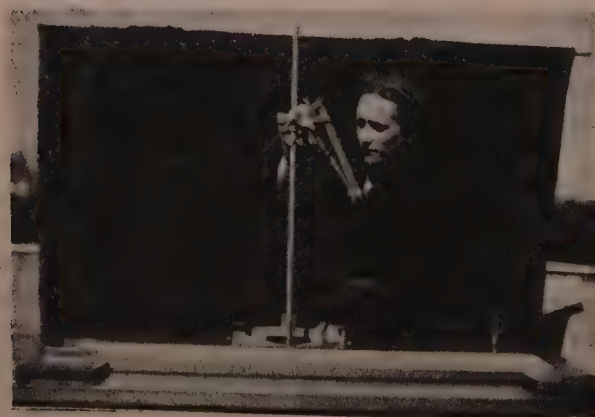
Uzme li se u obzir, da je odabrani promjer čašice samo neznatno veći od promjera kuglice i da je uzeta maksimalna visina čašice, pa da unatoč tome pokus (sl. 10) s ovim uređajem uspijeva s vjerojatnošću 95%, to je onda očito, da nam je pošlo za rukom smetnje uvelike ukloniti. Za preciznost aparature je značajno, da pokus ne uspijeva, ako čašicu povišimo za 1 mm. Prema tome je pri eksperimentalnom određivanju visine čašice pogreška manja od 1%.



Početni položaj:
kuglica na kraju
štapa, štap se upi-
re o zapreku, a
konac se napinje...



Konac je puknuo:
štap i kuglica slo-
bodno padaju...



Štap već miruje
na stolu, a kuglica
je upravo uletila
u čašicu!

SUMMARY

An Experiment with the Physical Pendulum

By V. Lopašić and Z. Janković

R. M. Sutton¹⁾ described under the title »Falling chimney-paradox of the free fall« an experiment which should show the observed breaking off of the upper end of tall chimneys whilst falling down. A uniform rod tilted at the angle Θ to the horizontal plane and a steel ball at its free end begin simultaneously their motions because of their weights. Beginning from an angle Θ the free end of the rod falls with a greater velocity than the ball and so the ball is in a certain height above the horizontal plane when the rod has reached it. To show this, a light cup of paper, into which the ball will fall, is fixed near the free end of the rod (fig. 1). R. M. Sutton proposes the angle $\Theta = 35^\circ$ for the performance of this experiment. To set the R. M. Sutton's apparatus in motion a prop is knocked out.

In the first part of our article we have undertaken the task to find the angle Θ at which the height h of the cup is maximal. Therefore we had to determine h as a function of Θ . Supposing a uniform and thin rod, the theory of pendulum gives us the relation (16) as the wanted function. The meaning of J in (16) is given by (13). The table I contains in column V the numerical values of h/r (r is the length of the rod) for various Θ . The diagram (fig. 3, curve V) shows this function. The table I gives the maximal height of the cup $h/r = 0,1129$ at the angle $\Theta = 28^\circ 40' \pm 5'$. Therefore the angle $\Theta = 35^\circ$ proposed by R. M. Sutton is not the most suitable one for the performance of the experiment. The expression (19) shows how much later is the ball than the rod in arriving into the horizontal plane. The numerical values of this delay for various Θ are given in the table I column IV and shown as the curve IV in fig. 3. It is evident that the time delay and the space delay do not fall together.

In the second part of our article we have found the path of the ball in a system $X'Y'$ rigidly connected with the rod. It is important to know this path because of angles at which the ball leaves the rod and approaches the cup. This path is

represented by (22) where we have to put in simultaneous values for γ and ϑ . We obtain these values from relations (23) and (26) by introducing the same value of φ . The slope of the path is given by the expression (28) into which we have to insert (31) for $\frac{d\gamma}{d\vartheta}$. The value $\varphi = \frac{\pi}{2}$ corresponds to the starting position of the rod. If we put this value of φ into (31) we obtain the indeterminate form $\frac{0}{0}$ for $\frac{d\gamma}{d\vartheta}$ for which, according to (32) and (33), we get the value (34) independent of the starting angle Θ .

The slope of the path at the beginning is represented by (35). The angle α at which the ball leaves the rod (fig. 5) follows from (39). If the starts of the ball and the rod are mutually independent then the notch at the free end of the rod, where the ball is sitting, can be only a part of a semisphere which has the direction α as axis. The necessary condition for the stability of the ball in the notch is $\Theta < 35^{\circ}16'$ derived from (41). The slope of the path at the brim of the cup is given by (42) which with (43) gives (44). The angle β between the path and the axis of the cup follows from (46). If b is the diameter of a cylindrical cup, the ball be very small, the corrected height H of this cup is represented by (47).

The table II contains the angles α and β at various Θ . The table III represents the path of the ball for $\Theta = 28^{\circ}$, and the table IV the one for $\Theta = 42^{\circ}$. These two paths are shown in fig. 6. We can infer from the numerical material given in tables II, III, IV that the limit angle for the performance of the Sutton's experiment is $\Theta_g = 48^{\circ}$.

In the third part of our article we have described our experimental arrangement which was made in accordance with the theoretical results exposed above. The angle $\Theta = 28^{\circ}$ was selected for this apparatus. The axis round which the rod rotates is represented in fig. 7. The trigger arrangement for setting the apparatus in motion is shown in fig. 8. A thread, just strong enough to hold the rod, is wound on the reel so that the rod is gently pressed against a strong iron bar. The angle Θ is then just 28° and the ball is put into the notch. A small part of the end of the rod is cut off so that the centre

of the ball is on the length axis of the rod and 100,0 cm far from the fulcrum. If the thread is strained to the breaking-point by winding it a little more, the rod and the ball are released instantaneously and very quietly.

If we request that the pressure of the bearings on the axis should not alter in the moment when the thread snaps, then follows that the thread is to be tied at the centre of percussion and strained perpendicularly to the rod length (See expressions (50), (51), (52), (53) and fig. 9).

The cup is made of celluloid and has the diameter $b = 13$ mm slightly greater than the diameter of the ball (0,5inch). The height of the cup is made according to the theoretical value.

The facts that the ball falls into the cup with 95% probability and that the experiment is unsuccessful if the cup is heightened for 1 mm, illustrate the precision of our apparatus. Therefore the error with our apparatus is not greater than 1%. Fig. 10. shows three stages of the experiment.

О ЈЕДНОЈ ЛИНЕАРНОЈ ПАРЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ

УВОД

Предмет овог рада је линеарна парцијална једначина реда n :

$$(I) \quad (x p + y q)^{(n)} + a_1 (x p + y q)^{(n-1)} + a_2 (x p + y q)^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} (x p + y q) + a_n z = 0,$$

где је

$$a_k = \text{const.};$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$(x p + y q)^{(k)} = x^k \frac{\partial^k z}{\partial x^k} + \binom{k}{1} x^{k-1} y \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-1} \partial y} + \binom{k}{2} x^{k-2} y^2 \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-2} \partial y^2} + \dots + y^k \frac{\partial^k z}{\partial y^k}$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Са парцијалном једначином (I) може се повезати једна алгебарска једначина степена n — карактеристична једначина:

$$(II) \quad a^n + s_1 a^{n-1} + s_2 a^{n-2} + \dots + s_{n-1} a + s_n = 0$$

чији су коефицијенти

$$s_1, s_2, \dots, s_n$$

цели полиноми првог степена по

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Тада се има овај резултат:

1. У случају када су корени

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

једначине (II) различити, општи интеграл једначине (I) је

$$z = \sum_{v=1}^n x^{a_v} f_v \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\left(f_v = \text{произвољне функције од } \frac{y}{x} \right):$$

2. У случају када једначина (II) има k различитих вишеструких корена

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

чији су редови

$$m_1, m_2, \dots, m_k$$

$$\left(\sum_{v=1}^k m_v = n \right)$$

општи интеграл једначине (I) је

$$z = x^{a_1} \sum_{v=0}^{m_1-1} f_{1,v} \left(\frac{y}{x} \right) (\log x)^v + x^{a_2} \sum_{v=0}^{m_2-1} f_{2,v} \left(\frac{y}{x} \right) (\log x)^v + \dots$$

$$\dots + x^{a_k} \sum_{v=0}^{m_k-1} f_{k,v} \left(\frac{y}{x} \right) (\log x)^v$$

$$\left(f_{\mu,v} = \text{произвољне функције од } \frac{y}{x} \right).$$

Проучаваћемо у овом раду и једначину

$$(III) \quad z = (xp + yq) - \frac{1}{2!} (xp + yq)^{(2)} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (xp + yq)^{(n)},$$

која је нарочити случај једначине (I), и показати да једначина (III) има ове две особине:

1. Општи интеграл те једначине је

$$z = x f_1 \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 f_2 \left(\frac{y}{x} \right) + \dots + x^n f_n \left(\frac{y}{x} \right);$$

2. Потпуни интеграл једначине (III) добија се кад се у њој изводи смене произвољним константама.

Напомена. Раније смо објавили кратак резиме¹⁾ овог рада.

Jules Haag, потстакнут тим нашим саопштењем, објавио је један интересантан резултат²⁾ о парцијалној једначини

$$H(x, y, z, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

где је H ма каква функција назначених аргумената и где је

$$z_k = (xp + yq)^{(k)} \\ (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

¹⁾ D. S. Mitrinovich, *Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 210, 1940, p. 783—785).

²⁾ J. Haag, *Sur certaines équations aux dérivées partielles* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 212, 1941, p. 259—261).

ГЛАВА ПРВА

I. Посматрајмо полиноме

$$(1) \quad z = A_{10} x + A_{01} y,$$

$$(2) \quad z = (A_{10} x + A_{01} y) + (A_{20} x^2 + A_{11} x y + A_{02} y^2),$$

$$(3) \quad z = (A_{10} x + A_{01} y) + (A_{20} x^2 + A_{11} x y + A_{02} y^2) + \\ + (A_{30} x^3 + A_{21} x^2 y + A_{12} x y^2 + A_{03} y^3),$$

.....

где су A_{ik} произвољне константе.

Из релације (1) добија се

$$(4) \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = A_{10},$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = A_{01}.$$

Елиминацијом A_{10} и A_{01} из (1) и (4) долази се до линеарне парцијалне једначине првог реда

$$z = xp + yq.$$

Потпуни интеграл последње једначине дат је релацијом (1).

Из релације (2) излази

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = A_{10} + 2 A_{20} x + A_{11} y,$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = A_{01} + A_{11} x + 2 A_{02} y,$$

$$(5) \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 A_{20},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = A_{11},$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 A_{02}.$$

Елиминацијом пет констаната A_{10} , A_{01} , A_{20} , A_{11} , A_{02} из шест релација (2) и (5) добија се линеарна парцијална једначина другог реда

$$z = (xp + yq) - \frac{1}{2!} (x^2 r + 2 x y s + y^2 t).$$

Потпуни интеграл последње једначине дат је релацијом (2).

Из релације (3) налази се

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= A_{10} + 2 A_{20} x + A_{11} y + 3 A_{30} x^2 + 2 A_{21} x y + A_{12} y^2, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= A_{01} + A_{11} x + 2 A_{02} y + A_{21} x^2 + 2 A_{12} x y + 3 A_{03} y^2, \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2 A_{20} + 6 A_{30} x + 2 A_{21} y, \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= A_{11} + 2 A_{21} x + 2 A_{12} y, \\
 (6) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2 A_{02} + 2 A_{12} x + 6 A_{03} y, \\
 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= 6 A_{30}, \\
 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= 2 A_{21}, \\
 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= 2 A_{12}, \\
 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= 6 A_{03}.
 \end{aligned}$$

Ако се из десет релација (3) и (6) елиминише девет констаната које се јављају у тим релацијама, долази се до линеарне парцијалне једначине трећег реда

$$\begin{aligned}
 z = & \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{1}{2!} \left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 x y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{3!} \left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3 x^2 y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3 x y^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right).
 \end{aligned}$$

Потпуни интеграл последње једначине дат је релацијом (3).

На исти се начин долази до закључка да је релацијом

$$\begin{aligned}
 z = & A_{10} x + A_{01} y + \\
 & + A_{20} x^2 + A_{11} x y + A_{02} y^2 + \\
 & + A_{30} x^3 + A_{21} x^2 y + A_{12} x y^2 + A_{03} y^3 + \\
 & + A_{40} x^4 + A_{31} x^3 y + A_{22} x^2 y^2 + A_{13} x y^3 + A_{04} y^4
 \end{aligned}$$

Напомињемо да ће се у потпуном интегралу једначине (7) појављивати N констаната, где је

$$N = \frac{n(n+3)}{2}.$$

II. Може се поставити питање о томе да ли се наведени закључак може проширити на линеарну парцијалну једначину са непознатом функцијом z која зависи од више променљивих

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, \dots \quad (m \geq 3).$$

Одговор је афирмативан.

Уочимо, на пример, једначину

$$(8) \quad z \left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) - \\ - \frac{1}{2!} \left(x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + x_3^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + 2x_2 x_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} + 2x_3 x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \right).$$

Лако је показати да се потпуни интеграл последње једначине добија када се уместо извода првог и другог реда ставе произвољне константе, тј. потпуни интеграл једначине (8) је

$$z = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_1^2 + A_5 x_2^2 + \\ + A_6 x_3^2 + A_7 x_2 x_3 + A_8 x_3 x_1 + A_9 x_1 x_2,$$

где су A_k ма какве константе.

ГЛАВА ДРУГА

III. Покушаћемо сада да нађемо општи интеграл парцијалних једначина које смо посматрали у првој глави.

Пођимо од најпростије једначине ($n = 1$)

$$xp + yq = z.$$

Општи интеграл те једначине је

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

где је f произвољна функција аргумента $\frac{y}{x}$.

Уочимо затим једначину ($n = 2$)

$$(9) \quad z = xp + yq - \frac{1}{2!} (x^2r + 2xys + y^2t),$$

тј.

$$(10) \quad x^2r + 2xys + y^2t = 2(xp + yq) - 2z.$$

Пошто је

$$x^2r + 2xys + y^2t = x \frac{\partial}{\partial x} (xp + yq) + y \frac{\partial}{\partial y} (xp + yq) - (xp + yq),$$

једначина (10) добија облик

$$x \frac{\partial}{\partial x} (xp + yq) + y \frac{\partial}{\partial y} (xp + yq) = 3(xp + yq) - 2z.$$

Према томе, једначина (10) је еквивалентна *Charpit*-евом¹⁾ систему једначина

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3u - 2z,$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Да бисмо нашли општи интеграл *Charpit*-евог система парцијалних једначина, посматрајмо одговарајући систем обичних диференцијалних једначина

$$(11) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{3u - 2z}.$$

Један први интеграл система (11) је

$$\frac{y}{x} = C_1 \quad (C_1 = \text{интеграциона константа}).$$

Из једначине

$$\frac{dz}{u} = \frac{du}{3u - 2z}$$

тј.

$$\frac{du}{dz} = \frac{3 \frac{u}{z} - 2}{\frac{u}{z}}$$

¹⁾ О методи интеграције парцијалних једначина помоћу *Charpit*-евог система видети:

Nicolas Saltykow, *Equations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit* (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. 2, 1933, p. 66—81).

налази се

$$(12) \quad \frac{(u - 2z)^2}{u - z} = C_2,$$

где је C_2 интеграциона константа.

Према (12), једначина $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{u}$ постаје

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{d(4z + C_2)}{4z + C_2 \pm \sqrt{C_2} \sqrt{4z + C_2}}.$$

После интеграције и смењивања C_2 са

$$\frac{(u - 2z)^2}{u - z},$$

добива се

$$\frac{u \pm (u - 2z)}{x \sqrt{u - z}} = C_3,$$

где је C_3 интеграциона константа.

Најзад из релација

$$\frac{u \pm (u - 2z)}{x \sqrt{u - z}} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{(u - 2z)^2}{u - z} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

где су Φ и φ произвољне функције назначеног аргумента, добија се, после елиминације параметра u , општи интеграл једначине (9) у облику

$$z = x f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 f_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

где су f_1 и f_2 две произвољне функције од $\frac{y}{x}$.

До последњег резултата може се лакше доћи на овај — елегантнији начин.

Једна интеграбилна комбинација диференцијалних једначина (11) је

$$\frac{d(z - u)}{2(z - u)} = \frac{dx}{x},$$

одакле се добија

$$\frac{z - u}{x^2} = \text{const.}$$

Сем тога, може се створити и ова интеграбилна комбинација диференцијалних једначина (11):

$$\frac{d(2z - u)}{2z - u} = \frac{dx}{x}.$$

одакле излази

$$\frac{2z - u}{x} = \text{const.}$$

Општи интеграл *Charpit*-евог система дат је релацијама

$$2z - u = x f_1 \left(\frac{y}{x} \right),$$

$$z - u = -x^2 f_2 \left(\frac{y}{x} \right).$$

Елиминацијом параметра u из последњих двеју релација добија се општи интеграл задате парцијалне једначине у облику

$$z = x f_1 \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 f_2 \left(\frac{y}{x} \right),$$

што смо већ нашли поступком који је био скончан са компликованијим израчунавањима.

Напред смо показали да једначине:

$$z = xp + yq,$$

$$z = xp + yq - \frac{1}{2!} (x^2 r + 2xy s + y^2 t)$$

имају респективно као општи интеграл:

$$z = x f \left(\frac{y}{x} \right),$$

$$z = x f_1 \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 f_2 \left(\frac{y}{x} \right).$$

Посматрањем тих двеју парцијалних једначина и њихових општих интеграла, видимо извесну правилност која нас наводи на то да поставимо овакво питање:

Д а л и је

$$z = x f_1 \left(\frac{y}{x} \right) + x^2 f_2 \left(\frac{y}{x} \right) + x^3 f_3 \left(\frac{y}{x} \right)$$

општи интеграл парцијалне једначине

$$z = \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \\ - \frac{1}{2!} \left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{1}{3!} \left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right).$$

Одговор је потврдан.

Уопште, показаћемо да је

$$(13) \quad z = \sum_{k=1}^n x^k f_k \left(\frac{y}{x} \right)$$

општи интеграл парцијалне једначине

$$(14) \quad z = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} (x p + y q)^{(k)}.$$

Уведимо најпре ове ознаке

$$F_1 = x p + y q,$$

$$F_2 = (x p + y q)^{(2)},$$

$$\dots$$

$$F_n = (x p + y q)^{(n)}.$$

Полазећи од релације (13), а на основу теореме¹⁾ о хомогеним функцијама, могу се написати ове једнакости:

$$F_1 = x f_1 + 2 x^2 f_2 + 3 x^3 f_3 + \dots + k x^k f_k + \dots + n x^n f_n,$$

$$F_2 = 2 \cdot 1 x^2 f_2 + 3 \cdot 2 x^3 f_3 + \dots + k(k-1) x^k f_k + \dots + n(n-1) x^n f_n,$$

$$F_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 x^3 f_3 + \dots + k(k-1)(k-2) x^k f_k + \dots + n(n-1)(n-2) x^n f_n,$$

$$\dots$$

$$F_k = k(k-1)(k-2) \dots 2 \cdot 1 x^k f_k + \dots + n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) x^n f_n,$$

$$\dots$$

$$F_n = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 x^n f_n.$$

¹⁾ E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, cinquième édition, 1927, p. 61.

Те једнакости могу се написати и овако:

$$\begin{aligned} F_1 &= x f_1 + 2 x^2 f_2 + 3 x^3 f_3 + \dots + k x^k f_k + \dots + n x^n f_n, \\ F_2 &= 2! \left[x^2 f_2 + \binom{3}{2} x^3 f_3 + \dots + \binom{k}{2} x^k f_k + \dots + \binom{n}{2} x^n f_n \right], \\ F_3 &= 3! \left[x^3 f_3 + \dots + \binom{k}{3} x^k f_k + \dots + \binom{n}{3} x^n f_n \right], \\ (15) \quad &\dots\dots\dots \\ F_k &= k! \left[x^k f_k + \dots + \binom{n}{k} x^n f_n \right], \\ &\dots\dots\dots \\ F_n &= n! x^n f_n. \end{aligned}$$

Заменом вредности (15) у изразу

$$(x p + y q) - \frac{1}{2!} (x p + y q)^{(2)} + \dots + (-1)^{n+1} (x p + y q)^{(n)}$$

добија се, после груписања,

$$\begin{aligned} & x f_1 + x^2 f_2 + \left[\binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right] x^3 f_3 + \\ & + \left[\binom{4}{1} - \binom{4}{2} + \binom{4}{3} - \binom{4}{4} \right] x^4 f_4 + \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & + \left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} \right] x^k f_k + \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \right] x^n f_n. \end{aligned}$$

Како је

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1,$$

последњи израз се своди на

$$x f_1 + x^2 f_2 + \dots + x^n f_n,$$

што значи да функција (13) идентички задовољава једначину (14).

Показаћемо сада да се елиминацијом n параметара

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

из $(n + 1)$ релација (13) и (15) долази до парцијалне једначине (14), тј. најпре се има релација

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ F_1 & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ F_2 & 0 & 2! & 2! \binom{3}{2} & \dots & 2! \binom{k}{2} & \dots & 2! \binom{n}{2} \\ F_3 & 0 & 0 & 3! & \dots & 3! \binom{k}{3} & \dots & 3! \binom{n}{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ F_k & 0 & 0 & 0 & \dots & k! & \dots & k! \binom{n}{k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ F_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & n! \end{vmatrix} = 0.$$

Детерминанту која се јавља у последњој једначини развићемо по елементима прве колоне, тако да се добија

$$(16) \quad \Delta_0 z - \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 - \Delta_3 F_3 + \dots + (-1)^n \Delta_n F_n = 0,$$

где су $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ детерминанте реда n чије ћемо вредности одредити.

Δ_0 је дефинисано детерминантом

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ 0 & 2! & 2! \binom{3}{2} & \dots & 2! \binom{k}{2} & \dots & 2! \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 3! & \dots & 3! \binom{k}{3} & \dots & 3! \binom{n}{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k! & \dots & k! \binom{n}{k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & n! \end{vmatrix}.$$

Пошто су сви елементи, који се налазе са једне стране главне дијагонале, једнаки нули, детерминанта се своди на свој главни члан, тј.

$$\Delta_0 = 1! 2! 3! \dots n!$$

Да бисмо израчунали остале детерминанте Δ_k , уочимо детерминанту реда n :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{k-1}{1} & \binom{k}{1} & \binom{k+1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \dots & \binom{k-1}{2} & \binom{k}{2} & \binom{k+1}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \binom{3}{3} & \dots & \binom{k-1}{3} & \binom{k}{3} & \binom{k+1}{3} & \dots & \binom{n}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k-1}{k-2} & \binom{k}{k-2} & \binom{k+1}{k-2} & \dots & \binom{n}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k-1}{k-1} & \binom{k}{k-1} & \binom{k+1}{k-1} & \dots & \binom{n}{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \binom{k+1}{k+1} & \dots & \binom{n}{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix}$$

Она се своди на детерминанту реда $k < n$:

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{k-1}{1} & \binom{k}{1} \\ 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \dots & \binom{k-1}{2} & \binom{k}{2} \\ 0 & 0 & \binom{3}{3} & \dots & \binom{k-1}{3} & \binom{k}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k-1}{k-2} & \binom{k}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k-1}{k-1} & \binom{k}{k-1} \end{vmatrix}$$

Ако се сада у последњој детерминанти одузме свака колона од наредне колоне и при томе се има на уму образац

$$\binom{\lambda}{v} - \binom{\lambda-1}{v} = \binom{\lambda-1}{v-1},$$

долази се до овог резултата

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} & \dots & \binom{k-2}{1} & \binom{k-1}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{k-2}{2} & \binom{k-1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k-2}{k-3} & \binom{k-1}{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k-2}{k-2} & \binom{k-1}{k-2} \end{vmatrix},$$

Тј.

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \dots & \binom{k-2}{1} & \binom{k-1}{1} \\ 1 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{k-2}{2} & \binom{k-1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{k-2}{k-3} & \binom{k-1}{k-3} \\ 0 & 0 & \dots & \binom{k-2}{k-2} & \binom{k-1}{k-2} \end{vmatrix}.$$

Према томе долази се до обрасца

$$D_k = D_{k-1},$$

па затим

$$D_{k-1} = D_{k-2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D_4 = D_3,$$

$$D_3 = D_2.$$

Како је

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = 1,$$

имамо

$$D_3 = D_4 = \dots = D_k = 1.$$

Дакле

$$D_k = 1.$$

Сада ћемо наћи вредности наших детерминаната

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n.$$

Из онога што претходи види се да је

$$\Delta_k = 1! 2! 3! \dots (k-1)! (k+1)! \dots n!.$$

$$(k = 1, 2, 3, n-1).$$

Детерминанта Δ_n има вредност

$$\Delta_n = 1! 2! 3! \dots (n-1)!$$

Према томе, Δ_k је једнако производу факторијела бројева природног низа бројева почев од 1 до n закључно, где се $k!$ не појављује.

Ако се сада вратимо на једначину (16) и тамо ставимо нађене вредности за $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, имамо, после упрошћавања,

$$z = (x p + y q) - \frac{1}{2!} (x p + y q)^{(2)} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (x p + y q)^{(n)},$$

што је и требало показати.

(Наставља се.)

UGAO ZA SVAKOGA

REALNIH BROJEVA IMA ZBILJA VIŠE NEGO RACIONALNIH BROJEVA

Prije smo vidjeli (Glasnik, str. 91) da zbilja ima jednako mnogo prirodnih i racionalnih brojeva, jer se i svi racionalni brojevi mogu napisati u obliku jednog niza, kao što se u nizu nalaze i prirodni brojevi 1, 2, 3, ...

Medutim osnovna je tekovina novije nauke o beskonačnom da se svi realni brojevi ne mogu napisati u jednom nizu. Naprotiv, ako je

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

ma kakav niz realnih brojeva, ima uvijek bar jedan realan broj izvan toga niza (Cantor, 1874).

Dokaz, po dijagonalnom postupku, te činjenice je vrlo jednostavan. Treba samo svaki od brojeva u nizu (1) zamisliti kao beskonačan decimalni razlomak i to tako da se ne dogodi pa da počam od nekoga mjesta sve decimale toga broja budu sve same nule kao na pr. kod broja 3,500...; u ovom slučaju taj isti broj ćemo predočiti u obliku 3,49999...

Sada ćemo napisati broj

$$(2) \quad 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

i to tako da je b_1 ma koja znamenka različita od cifre prvog decimalnog mjesta broja a_1 ; isto tako, b_2 je ma koja brojka različita od brojke na drugom decimalnom mjestu člana a_2 niza (1) i t. d. b_n je ma koja cifra različita od cifre n-og decimalnog mjesta člana a_n niza (1).

Jasno je da je broj (2) moguće formirati na taj način i da se taj broj (2) razlikuje od svakog broja a_n u nizu (1).

Dakle je zbilja nemoguće napisati u jednom nizu sve realne brojeve. Nemoguće je spariti prirodne brojeve i realne brojeve. Postoje dakle dva različita neizmjereno velika broja: onaj koji kazuje koliko ima prirodnih brojeva i onaj koji kazuje koliko ima realnih brojeva. Ta činjenica, od osnovne važnosti u novijoj matematici, bila je ishodištem teorije skupova a time i mnogih novijih razmatranja u matematici.

Inače se može pokazati da svaki ma kako mali segment brojnog pravca ima isto toliko elemenata koliko i čitavi beskonačni prostor od 3, 4, 5, ..., n, ... dimenzija, pa čak kao i razni prostori od neizmjereno ali prebrojivo mnogo dimenzija (razni funkcionalni prostori Frécheta, Hilbertov prostor i t. d. koji su važni za moderna matematička razmatranja i razne primjene!).

(G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, 1932, p. 115—133; M. Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1928.)

ŠMITOVA TEORIJA POSTANKA ZEMLJE

Prije tri godine počeo je sovjetski akademik Oto J. Šmit objavljivati rasprave o postanku Zemlje i danas je to već prilično razrađena teorija. Po svojim bitnim značajkama ona se mnogo razlikuje od dosadanih kozmogonijskih teorija, pa je vrijedno iznijeti na ovom mjestu nekoliko pojedinosti o njoj. Od svih ostalih važnijih teorija: Kantove, Laplaceove, Moultonove, Jeansove i Fesenkove razlikuje se Šmitova teorija po tome, što Zemlja i ostali planeti nisu nastali iz Sunčeve tvari. Osnovna je njena misao, da su tijela planeta nastala na taj način, što je Sunce kružeći po svojoj stazi oko središta galaktičkog sistema presjeklo oblak tamne tvari, koji leži u galaktičkoj ravnini.

Pri tome je Sunce svojom privlačnom snagom zahvatilo dio te materije, koja se je počela kretati oko Sunca i produžila kretanje zajedno s njim oko središta galaktike. Na taj se način stvorio oko Sunca roj meteora najrazličitije veličine. Uslijed sukoba i približavanja, veći komadi privlačili su manje i kao posljedica toga nastalo je svega nekoliko velikih planeta na raznim daljinama od Sunca. Još i danas ima u svemirskom prostoru ostataka tog meteorskog roja, pa dnevno padne na Zemlju oko jedne tone meteorske prašine. Po Šmitovom mišljenju ranije je bilo mnogo češće to padanje, pa je Zemlja u vremenu od oko 7 milijardi godina narasla na svoju sadanju veličinu.

Osnovni nedostatak starijih teorija o postanku Zemlje i ostalih planeta bio je u neskladu sa zakonom o održanju količine gibanja Suncčevog sistema. Velike teškoće izazivala su kretanja raznih planeta i njihovih pratilaca ranijim teorijama, dok Šmitova teorija prilično jednostavno tumači osobitosti mehaničkog kretanja planeta. Činjenicu, da se planeti kreću oko Sunca približno u tankom pojasu, gotovo ravni, tumači Šmit jednostavnom pretpostavkom, da su se meteori i prije susreta sa Suncem kretali u jednoj ravni, pa ih je susret samo malo više porazbacao iz te ravni.

Činjenicu, da se planeti kreću u istom smjeru tumači Šmitova teorija pretpostavljajući, da gustina meteorskog roja s obje strane Sunca nije jednaka. To je izazvalo prevagu u jednom smjeru kretanja, jer bi inače, da je gustina bila podjednaka, svi meteori popadali na Sunce, a ne bi obrazovali planete.

Osobinu planetskih staza, da su gotovo posve kružne, koju starije teorije tumače kretanjem planeta kroz sredinu, koja pruža otpor njihovom kretanju, tumači Šmitova teorija na sasvim drugi način. Meteori se kreću oko Sunca po elipsama i to izduženim, ali njihove velike poluosi zauzimlju najrazličitije smjerove. Posljedica njihova skupljanja u jedno tijelo bit će ta, da će se to ujedinjeno tijelo, planet, kretati po gotovo kružnoj stazi oko Sunca, kao što se planeti doista kreću. Što je planet veći, to je sastavljen iz većeg broja meteora, pa je njegova staza više kružnog oblika.

Šmitova teorija tumači i druge osobine kretanja planeta, pa čak i razdaljinu od Sunca, koja je određena procesom postepenog sjedinjavanja meteora. Teorija također ukazuje na nužnost, da se rotacija Sunca oko osi vrši u malom nagibu prema ekliptici. Točna analiza te teorije daje kao rezultat, da ravnine planetskih staza moraju biti nagnute prema galaktičkoj ravni za više od 52° , što opažanja potvrđuju.

Najteže kod nove teorije je tumačenje razvitka Zemlje. Po Šmitovoj teoriji, Zemlja je otpočela kao nakupina tvrdih meteora, a ne kao žarka kugla. Po njemu je također tijekom dugog vremena u sredini nastalo teško jezgro, a naokolo ljuska lakših tvari. Po Šmitovoj zamisli Zemlja nije u središtu užareno jezgro, već je i u početku postanka bila toliko ugrijana, koliko odgovara njenoj daljini od Sunca t. j. $+4^\circ$ C. Uslijed radioaktivnog raspadanja u pojedinim dijelovima zemaljske kore nastaju mjesta visokih temperatura od oko 800° do 2000° C. Tako se javlja na pojedinim mjestima vulkanizam, a za nastajanje gorskih nabora nije potrebno pretpostaviti ohlađivanje Zemlje, jer je akademik Leibenson pokazao, da su uslijed ohlađivanja Zemlje mogli nastati tek mali nabori od nekoliko metara visine, a ne planine. Budući da je Zemlja od početka imala temperaturu, koja je pogodna za život, a ubrzo se uslijed kemijskih promjena pojavila voda i atmosfera, bili su svi uvjeti ispunjeni, da se pojavi i razvije život.

Šmitova teorija je uspješno protumačila niz pojava u Suncčevom sistemu, naročito u kretanju planeta, satelita i kometa, ali ima i slabih strana. Najvažnija je teškoća, što je potrebno dokazati osnovnu pretpostavku, naime, da je moguć zahvat roja meteora od strane Sunca. Ako postoje samo dva tijela, ona se ne mogu međusobno uhva-

titi, već se svako kreće dalje po svojoj stazi. Kako je u slučaju tri ili više tijela, nije pitanje riješeno, jer to spada u problem n -tijela, ali šmitova teorija pretpostavlja, da je onda moguće hvatanje roja meteora od strane Sunca. Postoji još niz pitanja, da se usklade činjenice geologije s osnovnom tvrdnjom, da je Zemlja nastala kao čvrsto tijelo. Mora se dalje postaviti pitanje, kako je bilo kod slijedećih prolaza Sunca kroz ravninu galaktike, jer prema modernim ispitivanjima Sunce opiše svoju stazu za 200 do 300 miliona godina, a po šmitovoj teoriji bila bi Zemlja stara oko 7 milijardi, dakle je Sunce već tridesetak puta prošlo po svojoj stazi kroz galaktičku ravninu i tamo nakupljenu tamnu materiju. Na svaki način je teorija akademika šmita vrijedna pažnje i pruža nove poglede na to veoma zanimljivo pitanje postanka Zemlje.

L. R.

ZADACI

Rješavajte zadatke i šaljite nam rješenja; ako rješenje bude neispravno — stvar ostaje kao da se ništa nije ni dogodilo. Nemojte dostavljati samo gotove rezultate nego i opis čitava postupka pri njezgovu rješavanju.

Šaljite nam i razne zadatke!

33. Petar veli Pavlu:

Meni je dvaput toliko godina, koliko je tebi bilo, kad je meni bilo toliko godina, koliko je tebi sada. — Kad bude tebi toliko godina, koliko je meni sada, bit će nam zajedno 63 godine. Koliko je svakomu godina?

34. Odredi i nacrtaj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu i zadanu pravac i to njega u zadanoj točki.

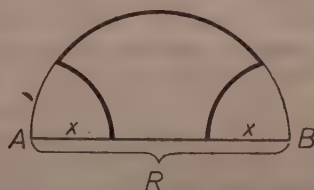
35. Kroz polovišta stranica nekog trokuta povučemo 3 paralele bilo kojeg smjera. Kroz svako polovište povučemo pravac, koji je simetrično postavljen spram dotične stranice s obzirom na paralelu kroz to polovište kao simetralu. Dokaži, da se ta tri pravca sijeku u jednoj točki. Kakvu krivulju opisuje ta točka, ako mijenjamo smjer paralela?

36. Riješi jednačbu $x^2 + 2y^2 = z^2$ u području cijelih brojeva, tako da x, y, z budu međusobno relativno prosti.

37. U što prelazi izraz

$$x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + xy \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + zx \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}$$

kad mjesto nezavisnih varijabla x, y, z uvedemo varijable X, Y, Z pomoću relacija $x = YZ, y = ZX, z = XY$?



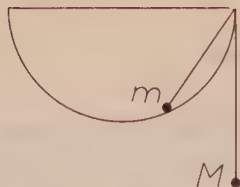
38. Izračunaj površinu tijela koje nastaje rotacijom oko AB lika prema slici (deblje izvučena linija), ako je zadano R i x .

$$39. \quad y^{(n)} - \binom{n}{1} a y^{(n-1)} + \binom{n}{2} a^2 y^{(n-2)} - \dots + (-1)^n a^n y = e^{ax}$$

ili pomoću operatora, simbolički,

$$\left(\frac{d}{dx} - a \right)^n y = e^{ax}; \quad y = ?$$

40. Odredi uslov ravnoteže za masu u polukugli koja je spojena sa drugom masom izvan polukugle koncem (slika!). Rub polukugle neka se ponaša kao neizmjenno malen kotačić.



41. Neka se nađe polovično vrijeme za uran, ako 1 gram toga elementa emitira u sekundi $1,2 \cdot 10^4 \alpha$ — čestica.

Uputa: Za radioaktivno raspadanje vrijedi zakon

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0 = broj atoma u času $t = 0$, e = baza prirodnih logaritama, λ = konstanta raspadanja (vjerojatnost, da će se u 1 sek. raspasti pojedini atom).

Ako je u času $t = T$ broj neraspadnutih atoma $N = \frac{N_0}{2}$, onda je T polovično vrijeme. Imamo

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \quad \text{ili} \quad T = \frac{\log_e 2}{\lambda} = \frac{0,7}{\lambda}.$$

Podaci: atomna težina urana = 238. Avogadrov broj $6 \cdot 10^{23}$.

42. Koliku debljinu bi trebalo imati uže, koje bi zapremalo stotio dio voluma Zemlje, a moglo bi sezati a) do Sunca, b) do najbliže stajačice »proxima centauri«, c) do skrajnjih spiralnih maglica u svemiru?

Podaci: volum Zemlje 10^{27} cm^3 ;

daljina Sunca $15 \cdot 10^{12} \text{ cm}$;

„ stajačice P. C. 4,3 godine svjetlosti;

„ skrajnjih spiralnih maglica $1,3 \cdot 10^6$ god. svj.;

1 god. svj. = $0,95 \cdot 10^{18} \text{ cm}$ ($\approx 10^{18} \text{ cm}$); $\pi = 3$.

Opaska. Važna kozmička veličina $R = 1,3 \cdot 10^6$ god. svj. je nazvana polumjerom svijeta (radius of the universe). U nauku su je uveli Einstein i Eddington (osnivač teorije o rastezanju svijeta).

43. Pomoću vrijednosti za polumjer svijeta $R = 1,3 \cdot 10^6$ god. svjetl. i srednje gustoće mase u tom svijetu $\rho = 2,4 \cdot 10^{-29} \text{ gr/cm}^3$ neka se izračuna: a) volum svijeta, b) u njem sadržana totalna masa, c) broj protona koji bi mogli sačinjavati totalnu masu, d) Einsteinova kozmička konstanta $\lambda = \frac{1}{R^2}$, e) volum u kojem bi se poprečno nalazio po jedan atom vodika.

Podatak: masa protona $1,66 \cdot 10^{-24} \text{ gr}$.

Lit. v. na pr. A. Eddington, *The Expanding Universe*, Cambridge 1933.

44. Žarulja od 40 vata šalje tok svjetlosti 12 lumena po vatu. Neka se izračuna a) totalni tok svjetlosti, b) jakost izvora (u svijećama), c) struja u pogonu, d) otpor užarene niti, e) trošak za 5-satno gorenje, f) razvijena toplina, g) rasvjeta u daljini 1 m uz kut incidencije 45° , h) prirast temperature za $V = 100 \text{ m}^3$ uzduha i procentni prirast barometarskog tlaka za taj volum.

Podaci: napetost u pogonu 220 volta;

cijena za kilovatsat 5 Din;

specif. tež. uzduha $1,3 \text{ kg/m}^3$;

„ toplina uzduha $0,17 \text{ kg. kal/stup}$.

45. S kolikom početnom brzinom mora poći tijelo, koje se giba po kosini tako, da pređe neki put l u vremenu, koje je jednako trajanju njihaja za njihalo jednake dužine l ? Uz kakve priklone kosine je početna brzina pozitivna, jednaka nuli, negativna?

RJEŠENJA

Nastavljamo objavljivanjem zadataka iz brojeva 1-3 Glasnika. Šaljite nam rješenja! Još nismo primili rješenja zadataka 3, 6 i 9 iz prvoga broja Glasnika.

4. Nađi ekstreme i odredi karakter niza

$$(1) \quad \sqrt[1]{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

(Zadatak je riješio Fr. Neděla, Zagreb.)

Da se oko svakog člana niza $\sqrt[n]{n}$, ($n = 1, 2, \dots$) ne može opisati jedna kružnica tako da dobijemo niz kružnica koje su jedna izvan druge izlazi odatle što taj niz konvergira prema svojem prvom članu $\sqrt[1]{1} = 1$. Stvarno, svakako je $\sqrt[n]{n} > 1$ za svaki $n > 1$, što znači da je $\sqrt[n]{n} - 1 \equiv a_n > 0$ za svaki $n > 1$. To znači da je $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ t. j. $n = (1 + a_n)^n$ sa $a > 0$ za svaki $n > 1$. No to je dalje $1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \dots + \binom{n}{n} a_n^n$; specijalno dakle $n > 1 + \binom{n}{2} a_n^2$ odakle $a_n < \frac{2}{\sqrt{n}}$. Ta nejednakost zajedno s $a_n > 0$ daje $a_n \rightarrow 0$ kod $n \rightarrow \infty$, a to znači da zaista $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1 = \sqrt[1]{1}$ kod $n \rightarrow \infty$.

1 je dakle najmanji član niza (1).

Dokažimo da je $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ za $n > 2$ t. j. da niz (1) počevši od svojeg trećeg člana monotono opada.

U stvari, $\sqrt[n+1]{n+1} = \sqrt[n(n+1)]{n(n+1)^n}$. No, po binomnom poučku

$$(n+1)^n = \binom{n}{0} n^{n-0} + \binom{n}{1} n^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} n^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} n + \binom{n}{n}.$$

Svakako su dva zadnja člana $n^2 + 1 < n^n$ čim je $n > 2$. Nadalje je za preostalih $n-1$ članova: $\binom{n}{k} n^{n-k} < n^n$ t. j. $\binom{n}{k} n^{-k} < 1$ jer je $\binom{n}{k} n^{-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{n-2}{3n} \dots \frac{n-k+1}{kn}$, što je očito < 1 , jer je svaki faktor, osim prvog, < 1 . Dakle je $(n+1)^n < n^n (n-1) + n^n = n^{n+1}$ t. j. $(n+1)^n < n^{n+1}$ za $n > 2$, a time vadeći $n(n+1)$ korijen: $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, za čim smo i išli.

Direktno se uvjeravamo da je treći član $\sqrt[3]{3} = 1,442\dots$ veći od drugog člana $\sqrt[2]{2} = 1,414\dots$ tako da je $\sqrt[3]{3}$ najveći član niza (1).

Stvar se još bolje vidi, ako svoj niz ekstrapoliramo.

Ekstrapolirajmo niz (1) i to pomoću funkcije $y = \sqrt[x]{x}$. Istražimo njen tok.

$$y' = \sqrt[x]{x} \frac{1}{x^2} (1 - lx)$$

$$\text{za } 1 < x < e \quad y' > 0 \quad y \text{ raste}$$

$$\text{za } e < x < \infty \quad y' < 0 \quad y \text{ pada}$$

$$\text{za } x = e \quad y' = 0 \quad y \text{ poprima maksimum } \sqrt[e]{e} = 1,4447$$

$$\text{za } x = \infty \quad y' = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\left[\frac{1}{x} \right]_{x=\infty}} = e^0 = 1.$$

Kako je 1 granica niza $\sqrt[n]{x}$ za bilo koji niz realnih brojeva x koji teži prema ∞ , to je on i granica niza $\sqrt[n]{n}$ za niz prirodnih brojeva, koji $\rightarrow \infty$.

Imamo dakle

$$\text{za } 1 < n < e \quad \text{t. j. za } n = 1, 2 \quad 1 < \sqrt{2} < \sqrt[e]{e}$$

$$\text{za } e < n < \infty \quad \text{t. j. za } n = 3, 4, 5, \dots \quad \sqrt[e]{e} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \dots > 1$$

Kako je $\sqrt{2} = 1,414\dots$ a $\sqrt[3]{3} = 1,442\dots$, to je

$\sqrt[3]{3}$ najveći član niza a najmanji je 1, t. j. prvi.

Poradi konvergencije prema 1, ne može se oko prvog člana 1 opisati kružnica prema zahtjevu, jer ma kako mali bio njen polumjer, unutar kružnice bi pali gotovo svi članovi slijeda. Radi toga se članovi niza (1) ne mogu na traženi način separirati.

5. (Riješili: D. Blanuša, Zagreb; Vl. Devidé, Zagreb.)

Kako je uvijek $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, to je slijed parcijalnih suma zadanog reda

$$\sum_1^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right] \text{ monotono padajući, jer su mu članovi zbrojevi samih negativnih sumanda.}$$

No zbog

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} < \\ &< 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n!} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \end{aligned}$$

Dakle je

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

Dakle je ($m < n$), m konačno, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} - \sum_m^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right] &= \sum_m^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] > \\ &> \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \dots + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{m!} \right) + \\ &+ \frac{1}{(m+2)!} + \frac{1}{(m+3)!} + \dots + \frac{1}{m+1} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(m+1)!} + \dots \right. \\ &+ \left. \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right) > \\ &> \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \end{aligned} \quad (a)$$

dakle red ..

$$- \sum_m \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right]$$

radi divergencije harmoničkog reda zajedno s desnom stranom nejednadžbe (a) teži u ∞ , t. j. zadani red pogotovo divergira u $-\infty$ (jer mu je i prvih $m-1$ članova negativno).

V. Devidé

Generalizacija. Pitanje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{a}{n}} \right]$.

Razmatramo red sa e puta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa $a_n = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{a}{n}-1}$, (1)

koji će istodobno sa zadanim redom biti konvergentan ili divergentan.

Da ustanovimo predznak članova, tvorimo

$$\ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{a}{n}-1} \right] = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{a}{n} - 1, \quad (2)$$

Razvijanje logaritma u red daje

$$n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots \right) + \frac{a}{n} - 1 = \frac{2a-1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \dots \quad (3)$$

Predznaci tih članova počevši s drugim alterniraju, a apsolutne vrijednosti monotono padaju. Za $a \geq \frac{1}{2}$ je dakle suma prvih dvaju članova veća od apsolutne vrijednosti

trećeg i suma reda je pozitivna. Za $a < \frac{1}{2}$ bit će za $n > \frac{1}{3(1-2a)}$ suma prvih dvaju članova negativna, jer iz $\frac{2a-1}{2n} + \frac{1}{3n^2} < 0$ izlazi $n > \frac{2}{3(1-2a)}$, pa skupa s trećim članom daju sumi reda negativni predznak.

Vidimo dakle, da je za $a \geq \frac{1}{2}$ izraz (2) pozitivan, dok je za $a < \frac{1}{2}$ izraz sigurno negativan za sve vrijednosti od n , za koje je

$$n > \frac{2}{3(1-2a)}. \quad (4)$$

Prema tome je izraz (1) pod istim uvjetima negativan odnosno pozitivan (jer je suptrahend pod tim uvjetima veći odnosno manji od 1). U prvom slučaju je

konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ekvivalentna s konvergencijom produkta

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + (-a_n)] = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{a}{n}-1}, \text{ a u drugom slučaju s konver-}$$

gencijom produkta $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{a}{n}-1}$. U svakom slučaju je

dakle potrebno istražiti konvergenciju produkta

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{\frac{a}{n}-1}. \quad (5)$$

Parcijalni produkt prvih n članova glasi

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{1}{e^n} e^{a \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)} \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \dots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\
 &= \frac{e^{a \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)} (n+1)^n}{e^n n!} = \frac{1}{\mu(n)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{e^{a \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}} = \\
 &= \frac{1}{\mu(n)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{a \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \ln n}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

gdje je

$$\mu(n) = \frac{n! e^n}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}. \quad (7)$$

Budući da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$, (8)

gdje je $\gamma = 0,557 \dots$ Euler-Mascheronijeva konstanta, to je

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \ln n \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \right] + \\
 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) \ln n \right] &= a\gamma + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) \ln n \right] = \infty \quad \text{za } a > \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\gamma}{2} \quad \text{za } a = \frac{1}{2} \\
 &= -\infty \quad \text{za } a < \frac{1}{2}
 \end{aligned} \quad (9)$$

Dakle:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \ln n} &= \infty \quad \text{za } a > \frac{1}{2} \\
 &= e^{\frac{\gamma}{2}} \quad \text{za } a = \frac{1}{2} \\
 &= 0 \quad \text{za } a < \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Budući da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n) = 1$ (11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (12)

to je dakle prema (6) $= \infty$ za $a > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \frac{e^{\frac{\gamma}{2} + 1}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{za } a = \frac{1}{2} \\
 &= 0 \quad \text{za } a < \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Produkt (5) i prema tome i zadani red je dakle konvergentan za $a = \frac{1}{2}$, a divergentan za $a \neq \frac{1}{2}$.

D. Blanuša

Inače zadatak 5 spada u ovaj tip razmatranja: zna se da je za konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ potrebno da $a_n \rightarrow 0$, kad $n \rightarrow \infty$. U drugu ruku, ako neki niz a_n konvergira, pa mu s a označimo limes, onda je jasno da $a - a_n \rightarrow 0$, kad $n \rightarrow \infty$. Ako dakle promatramo red $\sum_n (a - a_n)$, onda je za nj ispunjen gornji potrebni uslov konvergencije. Međutim, sam red na mora biti konvergentan, kao što smo vidjeli u slučaju niza $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. A ne mora niti divergirati! Jer da smo stavili $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, onda $a_n \rightarrow e$, pa je $e - a_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots < \frac{1}{n!(n+1)} + \frac{1}{n!(n+1)^2} + \frac{1}{n!(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n!(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) = \frac{1}{n!n} < \frac{1}{n^2}$ t. j. $e - a_n < \frac{1}{n^2}$ pa je zato $\sum_{n=1}^{\infty} (e - a_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, a ovaj je red konvergentan, i to prema $\frac{\pi^2}{6}$.

Ako dakle niz a_n konvergira prema a , onda u pitanje konvergencije i divergencije reda $\sum (a - a_n)$ ulazi i pitanje, kako brzo niz a_n konvergira prema svojem limesu a .

16. (Riješili: D. Blanuša, Zagreb; V. Devidé, Zagreb; I. Brčić-Kostić, Subotica).

Ako su a i b dva primbroja > 7 , onda je

$$N(a, b) \equiv (a^2 - 1)(b^2 - 1)(a^6 - b^6) \text{ djeljivo sa } 580608.$$

$$\text{Kako je } (a^2 - 1)(b^2 - 1)(a^6 - b^6) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} (a+1) \stackrel{(2)}{(a-1)} \stackrel{(3)}{(b+1)} \stackrel{(4)}{(b-1)} \stackrel{(5)}{(a+b)} \stackrel{(6)}{(a-b)} \stackrel{(7)}{(a^2+ab+b^2)} \stackrel{(8)}{(a^2-ab+b^2)}$$

te $580608 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7$, bit će dovoljno pokazati da je barem jedan od faktora označenih sa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 izraza N djeljiv sa 7, kao i to da se 3^4 i 2^{10} nalaze u tim faktorima.

S obzirom na djeljivost sa 7, mogu a i b imati nezavisno koje god od ostataka 1, 2, 3, 4, 5, 6. U svakom slučaju se može lako dokazati da je barem jedan od izraza označenih sa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 djeljiv sa 7. Tako na pr., ako je $a = 7k + 3$, $b = 7l + 5$, onda je izraz (7) t. j. broj $a^2 + ab + b^2$ djeljiv sa 7.

S obzirom na djeljivost sa brojem $2^3 = 8$, ostaci brojeva a i b mogu biti 1, 3, 5, 7, i to u ovim varijantama:

I. 1, 1; II. 1, 3; III. 1, 5; IV. 1, 7; V. 3, 3; VI. 3, 5; VII. 3, 7; VIII. 5, 5; IX. 5, 7; X. 7, 7 ili u obrnutim varijantama. Samo se po sebi razumije da na pr. varijanta IV. znači da pri dijeljenju sa 7 broj a daje ostatak 1, a broj b ostatak 7.

U slučajevima I., IV., V., VI., VIII., X. jedan od faktora (5), (6) djeljiv je sa 8, a dva od (1)–(4) sa 4; u slučajevima II., III., VII. i IX. jedan od faktora (5), (6) djeljiv je sa 4, jedan od faktora (1)–(4) sa 8, a jedan drugi između faktora (1)–(4) sa 4.

Dakle je u svim slučajevima N djeljivo sa $8 \cdot (4 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{10}$. S obzirom na djeljivost sa 3, moguća su 3 slučaja (i tri obrnuta slučaja):

I. 1, 1. Tad su faktori (2), (4), (6), (7) djeljivi sa 3.

II. 1, 2. Tad su faktori (2), (3), (5), (8) djeljivi sa 3.

III. 2, 2. Tad su faktori (1), (3), (6), (7) djeljivi sa 3.

Dakle je uvijek N djeljivo sa 3^4 .

19. (Riješio Stj. Malčić, Petrovaradin.)

Kroz žarulju od 20 vata kod napetosti 200 volta teče prema Ohmovu zakonu struja jačine

$$\frac{20}{200} = 0,1 \text{ ampera.}$$

Kako je kulon = amper · sekunda i kako je naboj elektrona $1,6 \cdot 10^{-19}$

kulona, to će 0,1 kulona sadržavati $\frac{0,1}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,25 \cdot 10^{17}$ elektrona.

b) 250.000 ljudi bi svake sekunde izbrojalo 500.000 elektrona. Za cijelo izbrajanje bi im trebalo vrijeme

$$\frac{6,25 \cdot 10^{17}}{500\,000} = 1,25 \cdot 10^{12} \text{ sekunda} = 39.750 \text{ godina.}$$

c) Ako 1 kilovatsat (= 360.000 vatsekunda) stoji 7,5 din., onda na cijelu množinu elektrona dolazi svota

$$\frac{20 \cdot 7,5}{3\,600\,000} = 4,17 \cdot 10^{-5} \text{ din.}$$

20. (Riješio Stj. Malčić, Petrovaradin.)

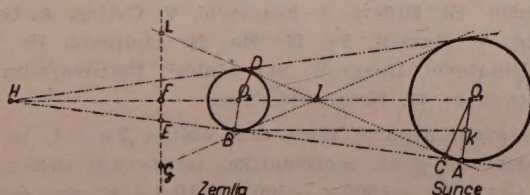
Struja 1 amper rastavlja u sekundi 0,00001046 + 0,0000829 = 0,00009336 grama vode. Struja 10^{-12} amp. rastavit će u sekundi $10^{-12} \cdot 0,00009336 \cdot 10^3 = 9,336 \cdot 10^{-14}$ miligrama vode. Da se elektrolizom rastavi 1 mg vode treba vrijeme

$$\frac{1}{9,336 \cdot 10^{-14}} = 1,07 \cdot 10^{13} \text{ sek. (340.000 god.)}$$

Budući da u jednom molu vode (= 18,01 grama) ima $6,03 \cdot 10^{23}$ molekula, bit će u $9,336 \cdot 10^{-14}$ mg vode broj molekula

$$\frac{9,336 \cdot 10^{-14} \cdot 6,03 \cdot 10^{23}}{18,01 \cdot 10^3} = 3,11 \cdot 10^6.$$

21. (Riješili: D. Pejnović i J. Lukatela, Zagreb; uz izvjesne aproksimacije, zadatak je riješio i Stj. Malčić, Petrovaradin; ispredi također Goldberg, *Kosmografija*, 1937, str. 133.).



Iz četiri para sličnih trokuta (v. sl.)

$$O_2BH \sim KAB, EFH \sim O_2BH, O_1CJ \sim O_2DJ, O_2DJ \sim LFJ$$

slijedi redom

$$a) \quad \frac{O_2H}{O_2B} = \frac{O_2O_1}{O_1A - O_2B}, \text{ odnosno } O_2H = \frac{O_2O_1 \cdot O_2B}{O_1A - O_2B},$$

$$\text{dužina totalne sjene: } x = \frac{24\,000 \cdot 1}{109 - 1} = 222 \text{ (z. p.)}$$

$$b) \quad \frac{FE}{FH} = \frac{O_2B}{BH}, \text{ odnosno } FE = \frac{FH \cdot O_2B}{\sqrt{O_2H^2 - O_2B^2}}.$$

Polumjer totalne sjene u daljini Mjeseca:

$$y = \frac{(222 - 60) \cdot 1}{\sqrt{222^2 - 1^2}} = 0,73 \text{ (z. p.)}$$

$$e) \quad \frac{O_1 J}{O_1 C} = \frac{O_2 J}{O_2 D}; \text{ dalje je } \frac{O_1 J + O_2 J}{O_1 C + O_2 D} = \frac{O_2 J}{O_2 D},$$

$$\text{zatim } O_2 J = \frac{O_1 O_2 \cdot O_2 D}{O_1 C + O_2 D}$$

$$\text{ili } O_2 J = \frac{24\,000 \cdot 1}{190 + 1} \text{ (z. p.)}$$

Napokon iz relacije

$$\frac{FL}{FJ} = \frac{O_2 D}{DJ}$$

slijedi da je polumjer polusjene:

$$FL = z = \frac{O_2 D (FO_1 + O_2 J)}{\sqrt{O_2 J^2 - O_2 D^2}} = \left(\frac{24\,000}{110} + 60 \right) : \sqrt{\left(\frac{24\,000}{110} \right)^2 - 1^2} = 1,27 \text{ (z. p.)}$$

O p a s k a. Polumjer Mjeseca iznosi $\frac{2}{7}$ polumjera Zemlje. On je mnogo manji od polumjera totalne sjene. Radi toga ne može nikada nastati prstenasta pomrčina Mjeseca.

23. Riješili: V. Lopašić, O. Savić i svi oni koji su navedeni kod zad. 24).

Označimo li ma kakav trocifren broj sa x , onda se svaki broj z , dobijen tako što se uz broj x dopiše još jednom taj isti broj x , može, očigledno, pretstaviti u obliku $z = 1000x + x = x \cdot 1001 = x \cdot 91 \cdot 11$. Odavde je očigledno da broj z mora biti djeljiv sa 91 (pored toga još i sa 11).

24. (Riješili: St. Erdelji, J. Ećimović, V. Cvitas, A. Grgić, B. Glunčić, St. Tojčić, V. Jirasek, Fr. Neděla, N. Išpirović, Dr. Cvelić, svi iz Zagreba; Z. Bulatović, Beograd; Stj. Malčić, Petrovaradin; Pavle Smorodski, Danilovgrad; M. Krajnović, Sisak.

Kako je svaki neparni cijeli broj oblika $2x + 1$, to se uslovi zadatka, prevedeni na jezik matematike, izražavaju ovako: $(2x + 1)^2 + (2x + 3)^2 + (2x + 5)^2 = 1000y + 100y + 10y + y$, pri čemu nepoznato y može imati samo neku od vrijednosti 1, 2, 3 ..., 9. Kad se gornja jednadžba sredi, dobija se: $12x^2 + 36x + 35 - 1111y = 0$, a odavde

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 12(35 - 1111y)}}{12} = \frac{-9 \pm \sqrt{3333y - 24}}{6}$$

Po prirodi zadatka mora x biti cio broj, a potreban uslov za to jest da $3333y - 24$ bude potpun kvadrat nekog cijelog broja. Lako je uvidjeti — probom — da će to biti slučaj samo za $y = 5$. Uvrstimo li ovu vrijednost u gornji obrazac za x , dobijamo $x_1 = 20$, $x_2 = -23$, te su traženi brojevi: 41, 43, 45, odnosno — 45, —43, —41.

J zašao je, evo, i predzadnji broj Glasnika za 1946. godinu! Zadnji će broj izaći za mjesec dana. Prvi broj za godinu 1947. izaći će najkasnije do konca aprila, a do konca školske godine izaći će tri dvobroja, tako da ćemo tokom ljetnih školskih praznika imati u rezervi izvjestan broj zadataka i problema za rješavanje. Šaljite pretplatu za Glasnik matematičko-fizički i astronomski! Godišnja pretplata iznosi 120 dinara. Sudjelujte u Glasniku! Širite Glasnik!

